

Reiner Guse Astro-Stammtisch Peine	Auswirkungen der Raumausdehnung unseres Universums (Expansion)	November 2015
---------------------------------------	---	---------------

1. Die Expansion des Universums und ihre Folgen

Hubble stellte 1929 fest, dass sich alle Galaxien voneinander entfernen und die Geschwindigkeit dabei mit zunehmender Entfernung größer wird. Dabei steigt die Geschwindigkeit proportional mit der Entfernung, so dass gilt:

$$v = H_0 \cdot d \quad v \text{ ist die Geschwindigkeit, } d \text{ die Entfernung und } H_0 \text{ die Hubble-Konstante.}$$

Der Wert der Hubble-Konstanten beträgt heute: $H_0 = 71 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = 22 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{MLy}}$ Das heißt, dass sich

eine Galaxie in einer Entfernung von 1 Millionen Lichtjahre mit 22km/s von uns entfernt, bei 2 MLy mit 44km/s usw. Aufgrund dieses Gesetzes darf nicht gefolgert werden, dass wir uns im Mittelpunkt des Universums befinden, sondern dieser Sachverhalt trifft für alle Galaxien und Punkte im Weltraum zu, da die Expansion dadurch zustande kommt, dass sich der Raum zwischen den Galaxien ausdehnt.

Die Expansion und die Tatsache, dass sich das Licht nicht beliebig schnell, sondern mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ bewegt, hat Konsequenzen für die Entfernungsmessungen.

Dazu folgendes Beispiel: Wir empfangen das Licht von einer Galaxie und stellen fest, dass es von ihr bis zu uns 5 Milliarde Jahre unterwegs war. Das Licht hat also eine Strecke von 5 Milliarde Lichtjahren zurückgelegt. Wie weit ist sie nun von uns entfernt? Da sie sich durch die Expansion während dieser 5 Milliarde Jahre weiter von uns entfernt hat, wird ihre Entfernung heute größer sein. Wir müssen daher zwischen verschiedenen Entfernungen unterscheiden:

d_L Lichtlaufdistanz (Strecke, die das Licht vom Objekt bis zu uns zurückgelegt hat)

d_E Eigendistanz (Entfernung zum jetzigen Zeitpunkt, auch mitbewegte Entfernung)

d_{ET} Eigendistanz zum Zeitpunkt t , hier zum Zeitpunkt der Lichtaussendung

Außerdem verwenden Astrophysiker die Leuchtkraftdistanz d_{lum} und die Winkeldistanz d_{ang} . Sie können mit Hilfe der Rotverschiebung z aus der Eigendistanz berechnet werden:

$d_{lum} = d_E (1 + z)$ Diese Distanz ergibt sich aus der Leuchtkraft und scheinbaren Helligkeit.

$d_{ang} = \frac{d_E}{z + 1}$ erhält man aufgrund des Winkels, unter dem das Objekt erscheint.

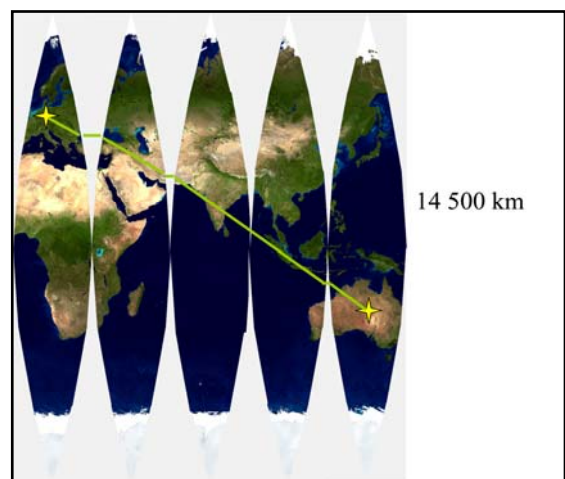
Bei „nahen“ Objekten, die weniger als 1 Milliarde Lichtjahre (Lichtlaufdistanz) entfernt sind, sind die Werte für alle fünf Distanzen gleich, bei weiter entfernten Objekten nicht mehr. Fälschlicherweise wird in der Literatur häufig dabei $d_L = d_{ET}$ angenommen, was jedoch nicht der Fall ist.

2. Entfernungsbestimmungen mit Hilfe von Karten

Die unterschiedlichen Entfernungen können berechnet oder auf geeigneten Karten abgelesen werden. Wir werden eine Karte verwenden, auf der wir die verschiedenen Entfernungen leicht ablesen können, und die zum Verständnis des expandierenden Universums beiträgt.

Bei einer maßstabgetreuen Landkarte kann die Entfernung zwischen 2 Orten durch Messung und einfache Rechnung bestimmt werden. Wenn die Oberfläche nicht mehr als „eben“ angesehen werden kann, wie z. B. bei großen Entfernungen auf der Erdoberfläche, dann ist in der Ebene eine Darstellung in Form von Sektorkarten möglich (s. rechts). Bei der Entfernungsbestimmung werden dabei die „Lücken“ waagerecht übersprungen und nicht mitgezählt.

Merke: Lücken in einer Sektorkarte werden übersprungen, sie haben für die Entfernungsbestimmung keinerlei Bedeutung.



3. Raumzeitkarten

Da sich das Universum durch die Expansion mit der Zeit ändert, müssen wir auf unserer Karte die Zeit berücksichtigen und eine wie in der Relativitätstheorie übliche Raumzeitkarte anfertigen. Da wir mit x , y und z oder als Astros mit RA, DEC und r (Entfernung) 3 Raumdimensionen haben und als Zeit eine vierte Dimension hinzukommt, müsste unsere Karte 4-dimensional werden. Berechnungen sind auch mit 4 und mehr Dimensionen möglich, Darstellungen leider nicht.

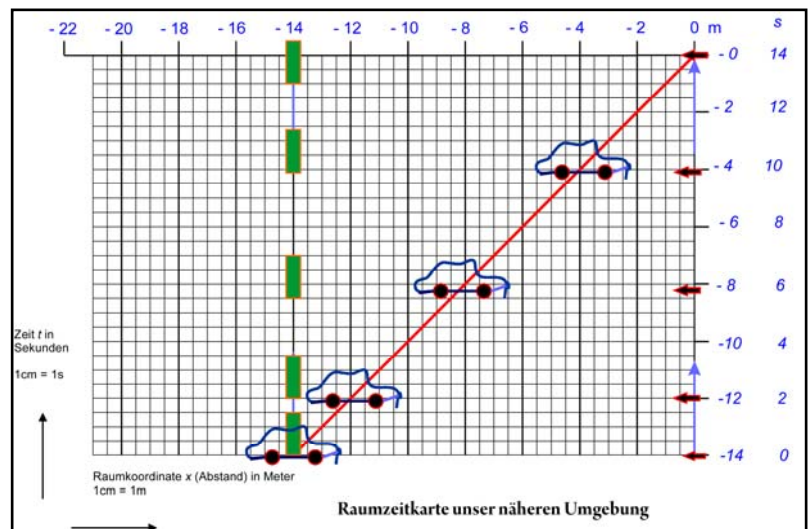
Da helfen uns die angenommenen Eigenschaften des Universums weiter, denn das Universum ist

- homogen (auf großen Skalen ist die Dichte gleichmäßig verteilt)
- isotrop (richtungsunabhängig, d. h. es gibt keine bevorzugten Richtungen) und
- flach (räumlich nicht gekrümmt).

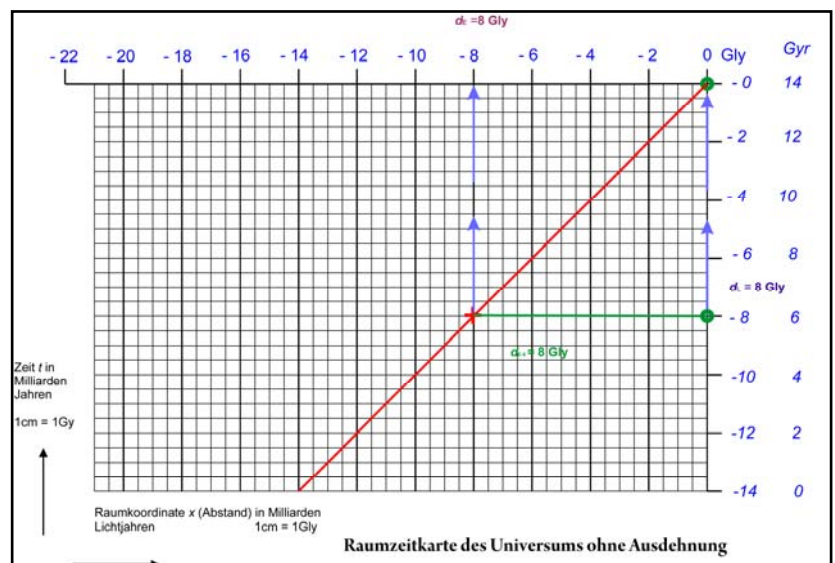
Aufgrund dieser Eigenschaften und der Tatsache, dass uns nur die Entfernungen interessieren, können wir 2 Dimensionen (y und z oder RA und DEC) weglassen und erhalten eine Raum-Zeit-Karte mit 2 Dimensionen: Eine Raumdimension in Form einer Entfernung (x oder r) und eine Zeitdimension. Vergleichbare Karten wurden

bei der Bundesbahn früher als Bildfahrpläne verwendet. Rechts ist eine Raumzeitkarte für unsere nähere Umgebung dargestellt. Es stellt waagrecht die Strecke und senkrecht die Zeit dar. Da die Zeit ständig vergeht, bewegen wir uns auf dieser Karte immer in Richtung der Zeit nach oben. Die Linien, die dabei entstehen, werden Weltlinien genannt. Die Weltlinien des Beobachters (rechts, Pfeil) und des grünen Turms weisen senkrecht nach

oben, da sich während der Zeit von 0 bis 14 Sekunden ihr Ort nicht ändern, sie bewegen sich nicht und verharren bei 0 m und -14 m. Das Auto bewegt sich während der Zeit auf der Raumachse x , weswegen die Weltlinie entsprechend der Geschwindigkeit schräg nach oben verläuft. Man kann auf der Weltlinie genau ablesen, an welchem Ort sich das Auto zu bestimmten Zeiten befindet.

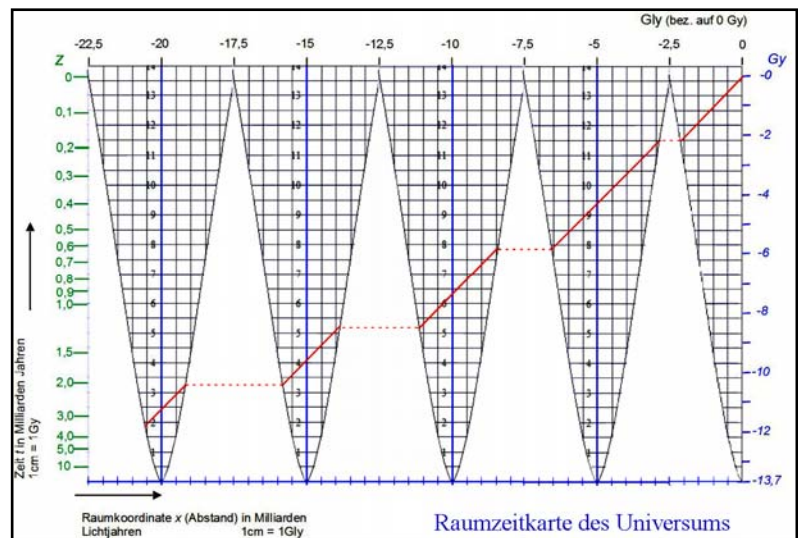


Zunächst wollen wir eine Raumzeitkarte für ein nicht expandierendes Universum, also ein statisches, betrachten. In früheren Zeiten hatte man es sich so vorgestellt. Den Zeitmaßstab wurde vom Urknall bis heute gewählt (0 bis 14 Gy), den Raummaßstab so, dass 1 Gy gleich 1 Gly entspricht und dadurch die Lichtgeschwindigkeit als 45° Linie eingezeichnet werden kann. Wir betrachten eine Galaxie (Kreuz), deren Licht 8 Milliarden Jahre bis zu uns unterwegs war. Die Lichtlaufzeit beträgt dann 8 Gy und die zurückgelegte Strecke des Lichtes $d_L = 8$ Milliarden Lichtjahre (8 Gly). Während der 8 Gy haben sich die Position der Galaxie (-8 Gly) und von uns (0 Gly) und der Raum dazwischen nicht verändert und daher sind alle 3 Entfernungen gleich groß: $d_L = d_E = d_{ET}$. Auch auf dieser Karte bewegen wir uns durch das Fortschreiten der Zeit ständig nach oben; da jedoch der Zeitmaßstab mit 1 cm = 1 Gy sehr groß gewählt wurde, brauchen wir diese Änderung hier nicht berücksichtigen.



4. Raumzeitkarte für das expandierende Universum

Die Maßstäbe übernehmen wir von der Karte für das statische Universum, wobei die Raumkoordinate hier nur bis 22,5 Gly dargestellt ist. Durch die Expansion hat die Karte ähnlich wie bei der Sektorkarte der Erde Lücken, die ebenfalls waagrecht übersprungen werden. In der Karte rechts ist bereits die Weltlinie des Lichtes, dass uns zur Zeit 0 (heute) erreicht, eingetragen. Das Licht, das wir von einem Objekt heute empfangen, musste von einem Punkt auf dieser Linie ausgehen. Die Karte kann links noch



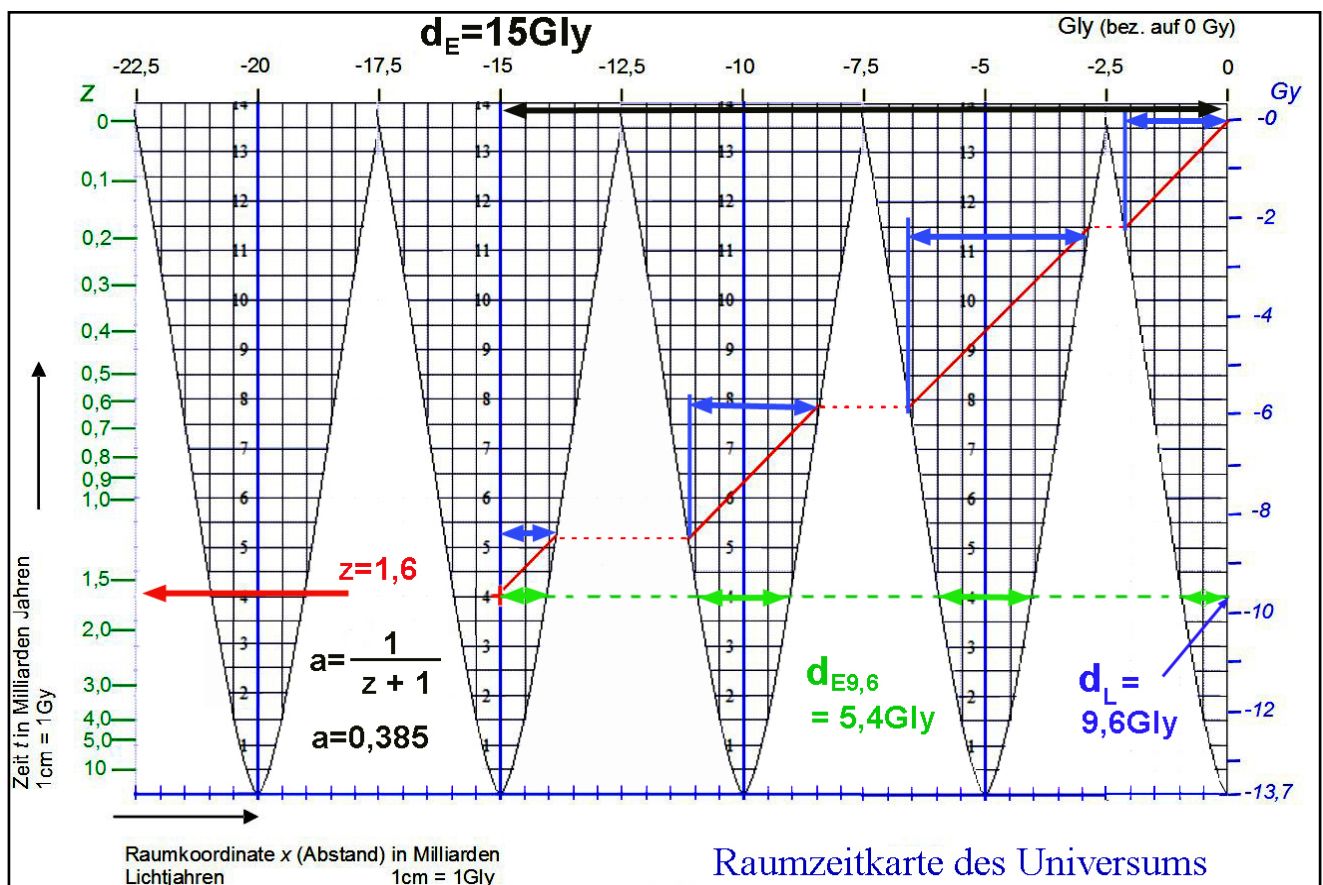
erweitert werden, so dass die Weltlinie des Lichtes bis zum Urknall reicht.

Jetzt können wir in eine beliebige Richtung im Weltraum schauen und suchen uns ein Objekt aus, das etwas weiter entfernt ist, z. B. deren ankommendes Licht 9,6 Milliarde Jahre unterwegs war.

Die Lichtlaufdistanz beträgt dann $d_L = 9,6$ Gly. Häufig wird dieser Wert z. B. aus die Rotverschiebung der Wellenlängen ermittelt. Es kann allerdings auch direkt mit der Rotverschiebung gearbeitet werden, sie beträgt $z = 1,6$. Nun können wir die Entfernung d_{ET} , die die Galaxie damals hatte, und die Entfernung d_E , die die Galaxie heute von uns hat, bestimmen. Dabei gehen wir wie folgt vor (s. Bild unten):

- Galaxieposition bei 4 Gy nach dem Urknall auf der Lichtweltlinie markieren.
- Damalige Distanz zu uns durch Messung des Abstandes (waagerechte Linie) ermitteln, wobei die Lücken wieder übersprungen werden (grüne durchgezogene Linie).
- Heutigen Abstand zum Zeitpunkt 0 ablesen (waagerechte Linie oben)

Wir erhalten dann: $d_{ET} = 5,4 \text{ Gly}$, $d_L = 9,6 \text{ Gly}$, $d_E = 15 \text{ Gly}$.

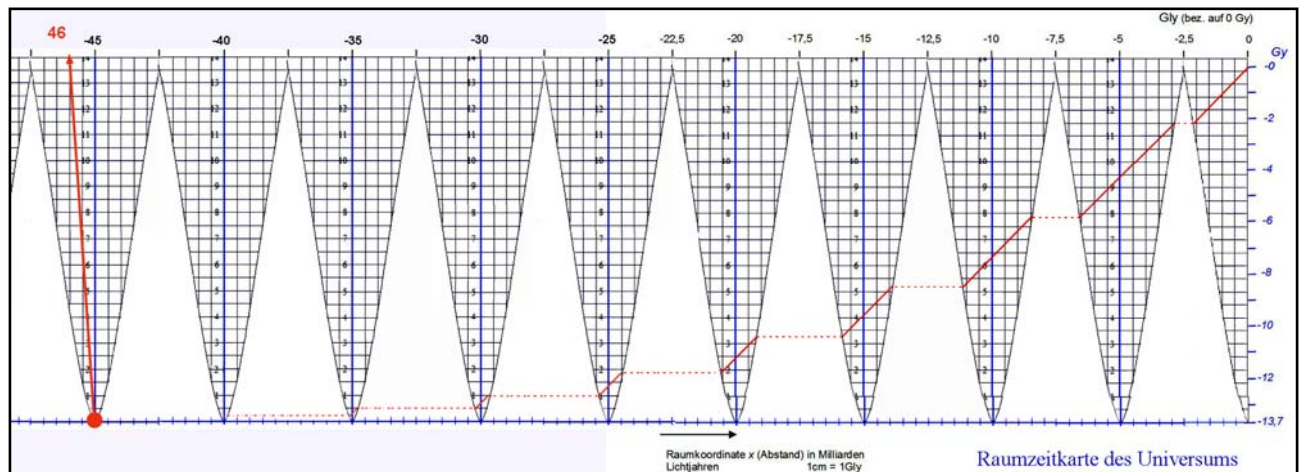


Es wird deutlich, dass auch die Lichtlaufdistanz und der damalige Abstand nicht übereinstimmen. Dieses ist darauf zurückzuführen, dass sich die Expansion auch auf das Licht auf dem Wege zu uns auswirkt. Nun können noch die Leuchtkraftdistanz d_{lum} und Winkeldistanz d_{ang} berechnet werden:

$$d_{\text{lum}} = d_E (z + 1) = 15 \text{ Gly} (1,6 + 1) = 15 \text{ Gly} \cdot 2,6 = \underline{\underline{39 \text{ Gly}}}$$

$$d_{\text{ang}} = \frac{d_E}{z + 1} = \frac{15 \text{ Gly}}{1,6 + 1} = \frac{15 \text{ Gly}}{2,6} = \underline{\underline{5,77 \text{ Gly}}}$$

Mit der Raumzeitkarte können alle Entfernungen ermittelt werden, wenn eine der Entfernungen oder die Rotverschiebung z oder der Skalenfaktor a bekannt ist. Außerdem lassen sich die Hubblekonstanten für verschiedene Zeiten und der Beobachtungshorizont (auch Partikelhorizont) bestimmen. Der Beobachtungshorizont gibt an, wie weit ein Objekt aktuell maximal entfernt sein kann, deren Licht uns heute erreicht. Man erhält ihn durch folgende Erweiterung der Karten:



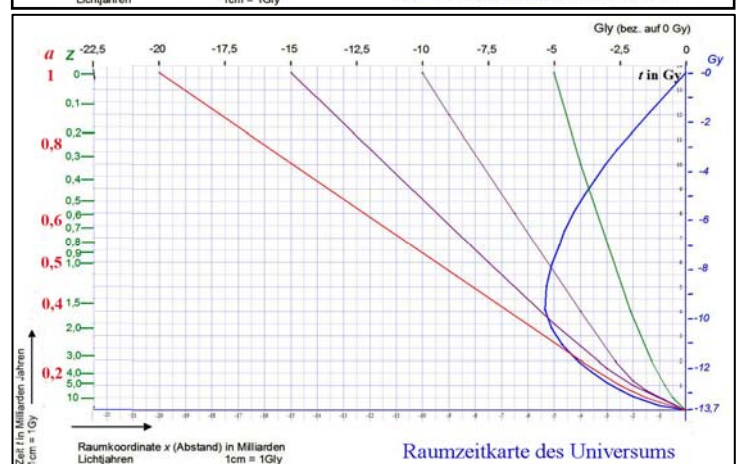
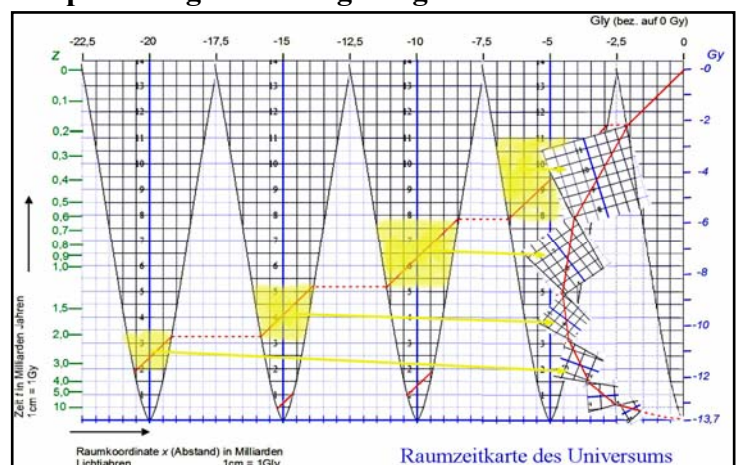
Der Wert liegt bei 45Gly, meistens wird dafür der Wert 46Gly angegeben. Der Eigenabstand der Hintergrundstrahlung beträgt 44Gly.

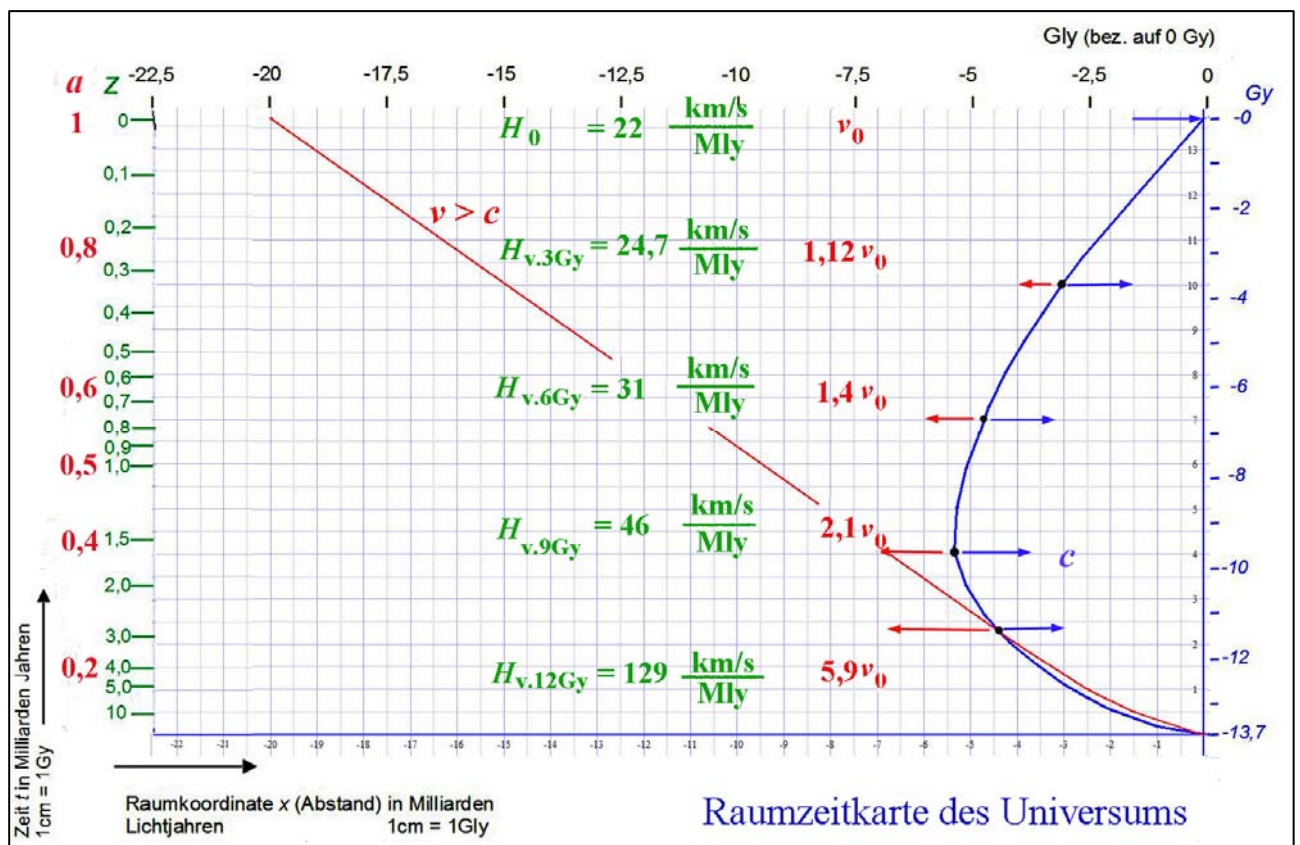
5. Warum können wir Objekte sehen, deren Expansionsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist?

Dazu müssen wir die Raumzeitkarte umgestalten, indem wir die Lücken so schließen, dass

- die Begrenzungslinien parallel an den Berührungspunkten der roten Lichtlinie anstoßen,
- die rote Verlaufslinie des Lichtes nicht unterbrochen wird,
- der Zeitmaßstab durch Verkleinerung der Flächensegmente erhalten bleibt.

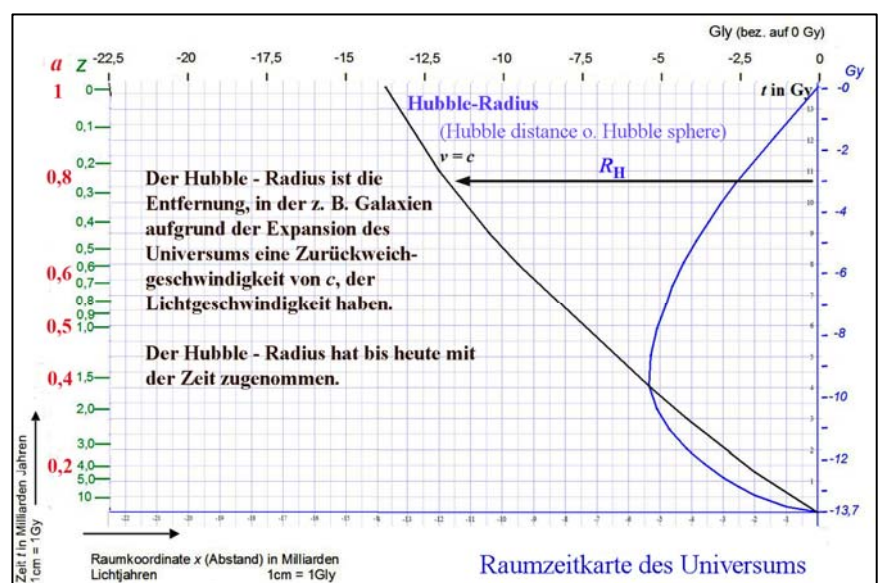
Man erhält einen birnenförmigen Verlauf der Lichtlinie. Jetzt verlaufen die Weltlinien einzelner Objekte wie z. B. von Galaxien nicht mehr senkrecht von unten nach oben parallel zur Zeitachse, sondern als Geraden vom 0 – Punkt aus je nach Expansionsgeschwindigkeit mit unterschiedlicher Steigung. Dabei entspricht eine Gerade mit einer negativen Steigung von 45° der Expansionsgeschwindigkeit eines Objektes mit Lichtgeschwindigkeit c . Ist die Steigung geringer, dann ist die Geschwindigkeit höher, bei größerer Steigung geringer.





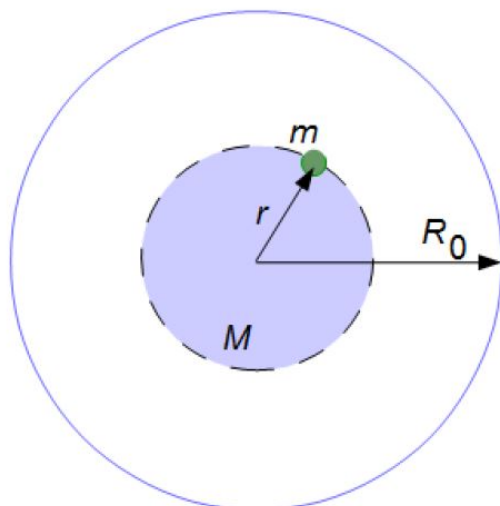
Im Diagramm betrachten wir ein Objekt, das sich gemäß der Steigung mit einer höheren Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit von uns entfernt. Trotzdem erreicht uns sein Licht, dass vor ca. 11,2 Gy ausgesandt wurde. Der blaue Pfeil entspricht der Lichtausbreitung in Richtung Beobachter und hat die Größe c . Der rote Pfeil entspricht der Expansion und hat zunächst die Größe $v > c$. Die Geschwindigkeiten werden nicht relativistisch behandelt, weil sie durch die Raumexpansion entsteht. Da die Expansion größer als c ist, entfernt sich das Licht vom Beobachter. Dieses ist solange der Fall, bis sich die Expansionsgeschwindigkeit bis auf c und unter c vermindert hat. Das ist nach 4 Lichtjahren vom Ursprung der Fall. Nun nähert sich der Lichtverlauf dem Beobachter, da c größer als die Expansionsgeschwindigkeit ist. Schließlich trifft das Licht mit c beim Beobachter ein, obwohl sich das Objekt durch die Expansion noch mit ca. $1,5 \times c$ entfernt hat und sich vermutlich immer noch mit dieser Geschwindigkeit entfernt. Wir können das Licht dieses Objektes noch sehen, weil die Hubble Konstante früher wesentlich größer war und mit der Zeit abgenommen hat. Im Diagramm sind die Hubble-Werte für verschiedene Zeiten angegeben (grün). Außerdem ist die Entweichgeschwindigkeit für einen unveränderte Distanz von uns aufgeführt (rot), sie hat im Laufe der Zeit abgenommen.

Der Radius, bei der Objekte sich genau mit Lichtgeschwindigkeit entfernen, wird Hubble-Radius genannt. Er ist in nebenstehendem Diagramm eingezeichnet. Er wurde seit dem Urknall ständig größer, verläuft allerdings nicht weiter als Gerade, sondern in der Zukunft mit größerer Steigung.



6. Mathematische Hintergründe

Aufgrund der Homogenität und Isotropie wird entsprechend dem Ansatz von Friedmann eine Kugel als Ausschnitt unseres Universums betrachtet und eine Gleichung zur Ermittlung der Ausdehnung in Abhängigkeit der Zeit entsprechend folgender Ausführungen aufgestellt:



Ziel: Verlauf der Expansion in Abhängigkeit der Zeit: $a = f(t)$

a Skalenfaktor

r Radius zum Zeitpunkt t

R_0 Radius heute

$$a = \frac{r}{R_0}$$

Friedmann Gleichung:

Ansatz für m :

$$W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = \text{konst.}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = k$$

$$\frac{m \cdot \dot{r}^2}{2} - \frac{G \cdot 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot m}{3r} = k$$

$$\dot{a}^2 \cdot R_0^2 - \frac{G \cdot 8\pi \cdot a^2 \cdot R_0^2 \cdot \rho}{3} = k_2$$

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi \cdot G \cdot a^2 \cdot \rho}{3} = k_3$$

Für ein räumlich flaches Universum ist $k = 0$.

Außerdem wird die beschleunigte Expansion berücksichtigt:

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 - \frac{8\pi \cdot G \cdot \rho}{3} = \frac{k_3}{a^2}$$

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 = \frac{8\pi \cdot G \cdot \rho_0}{3 \cdot a^3} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0}{a^3} + \Omega_\Lambda \right\}$$

Mit H_0 als Hubble-Konstante (heute) und den Dichteparametern Ω erhält man für die Differentialgleichung die Lösung:

$$a(t) = \left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega_\Lambda}} \sinh \left(\frac{3 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} \cdot t \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

Für

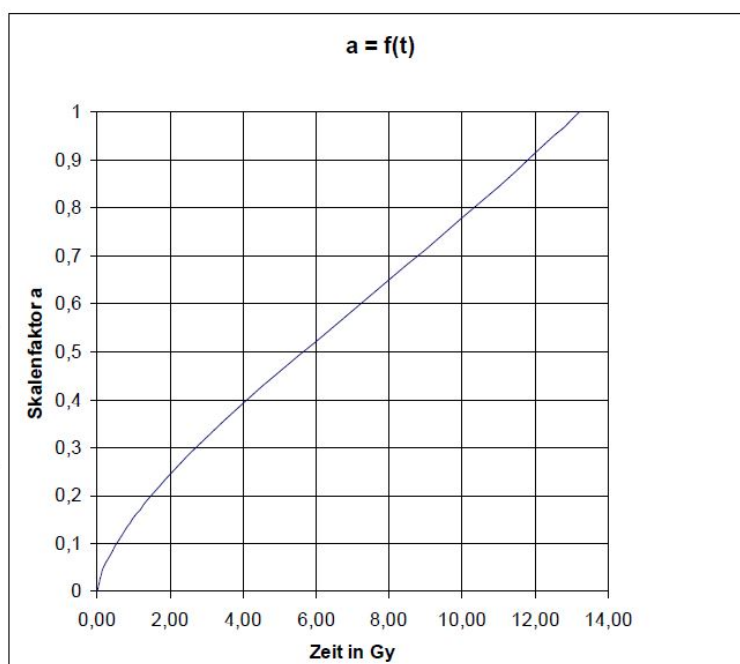
$\Omega_0 = 0,27$ (Materieanteil) und

$\Omega_\Lambda = 0,73$ (Anteil dunkle Energie) und

$H_0 = 71 \text{ km/sMpc}$ erhält man

$$a(t) = \left(0,665 \cdot \sinh \left(0,0916 \frac{t}{\text{Gy}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

Das entspricht nebenstehendem Verlauf.



Dieses Ergebnis wird nun mit Hilfe der Robertson-Walker Metrik verwendet, um eine Raumzeitkarte anzufertigen.

Lösung:

Anwendung der Metrik (Rechenvorschrift) eines expandierenden Universums nach Robertson-Walker:

$$ds^2 = -c^2 \cdot dt^2 + a^2(t) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ds ist das Linienelement im vierdimensionalen Raum. Zur Kartendarstellung werden die d - Werte durch nicht mehr gegen 0 gehende Δ - Werte ersetzt:

$$\Delta s^2 = -c^2 \cdot \Delta t^2 + a^2(t) \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Entsprechend der Vereinbarung, dass in der Raumzeitkarte nur eine Richtung berücksichtigt werden braucht, erhält man:

$$\Delta s^2 = -c^2 \cdot \Delta t^2 + a^2(t) \cdot \Delta x^2$$

Da die Punktabstände zu gleichen Zeiten ermittelt werden, wird der erste Term ebenfalls 0:

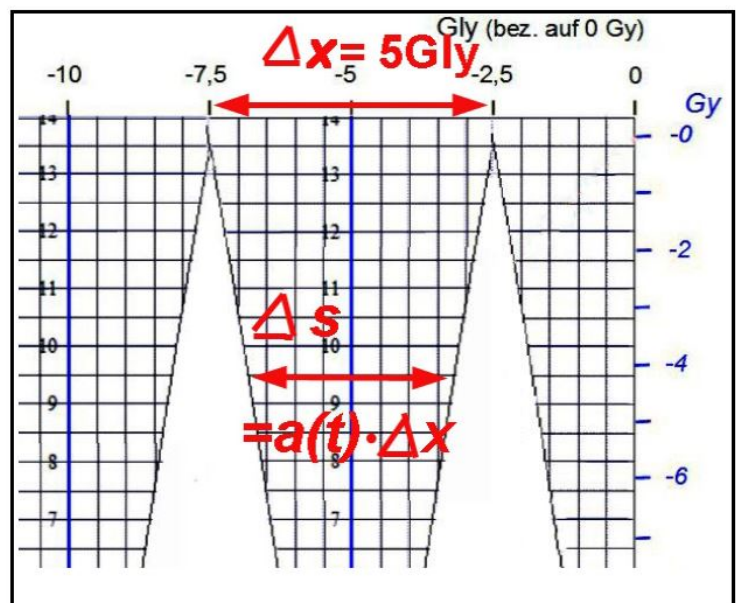
$$\Delta s^2 = a^2(t) \cdot \Delta x^2$$

und weiter

$$\Delta s = a(t) \cdot \Delta x$$

Für Δx wurden 5 Gly gewählt und die Δs Werte für die Zeitangaben mit obiger Formel errechnet.

Die Hüllkurven der Segmente in der Raumzeitkarte entsprechen dann dem Verlauf der oben dargestellten Funktion $a(t)$.



7. Weiter Informationen

Auf folgenden Seiten findet man weitere Informationen zu dem Thema. Unter der zweiten Adresse werden bei Eingabe der Rotverschiebung z die zugehörigen Entfernungen berechnet und angezeigt.

<http://www.mso.anu.edu.au/~charley/papers/DavisLineweaver04.pdf>

<http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>

http://www.klima-luft.de/steinicke/Artikel/MNU2012_Expansion.pdf

(nur bedingt geeignet)