

Bestimmung des Winkels zwischen Ekliptik und Mondbahn und weiterer Größen mit Fotos einer partiellen Sonnenfinsternis

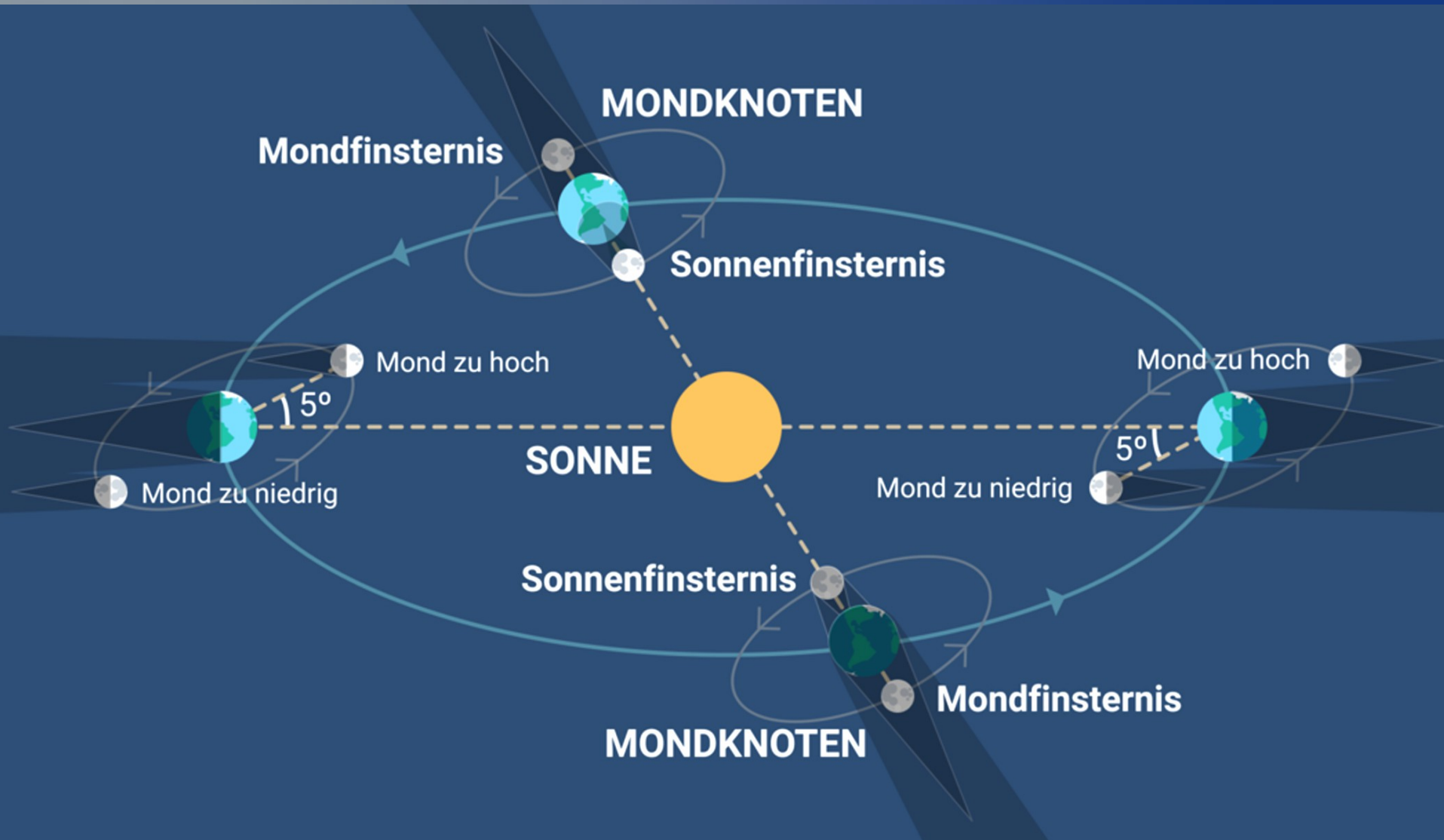


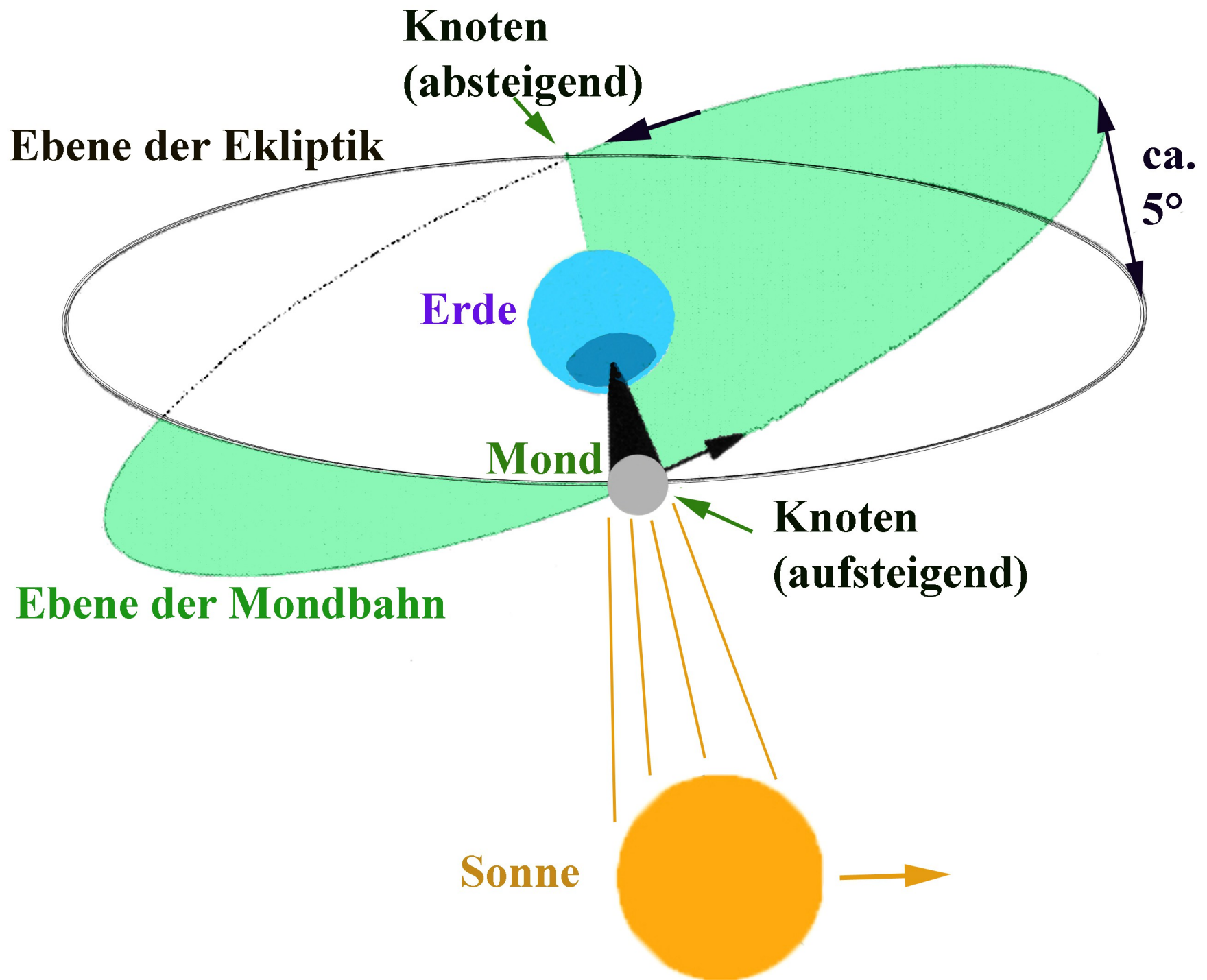




Sofi am 25.10.2022 vom Beginn l. o. (11:11 Uhr) zum Maximum l. u. (12:10 Uhr) bis zum Ende r. u. Borg 4 Zoll Teleskop und QHY294c; Peine, Reiner Guse

- Der Winkel zwischen Mond- und Sonnenbahn beträgt 5° .





Ausgangssituation mit folgenden Voraussetzungen

Partielle Sonnenfinsternis: 25.10.2022, Zeiten unten (MESZ)

Ort: Peine, N: 52,3°; O: 10,2°

Aufnahme mit parallaktischer Montierung



$$d_{\text{Erde_Mond}} = 374000 \text{ km}$$

$$d_{\text{Erde_Mond}} \ll d_{\text{Erde_Sonne}}$$

Bewegungsabläufe der Erde: Rotation, Umlauf um die Sonne
(Horizont, Ekliptik, Himmelsäquator, $\varepsilon = 23,4^\circ$)

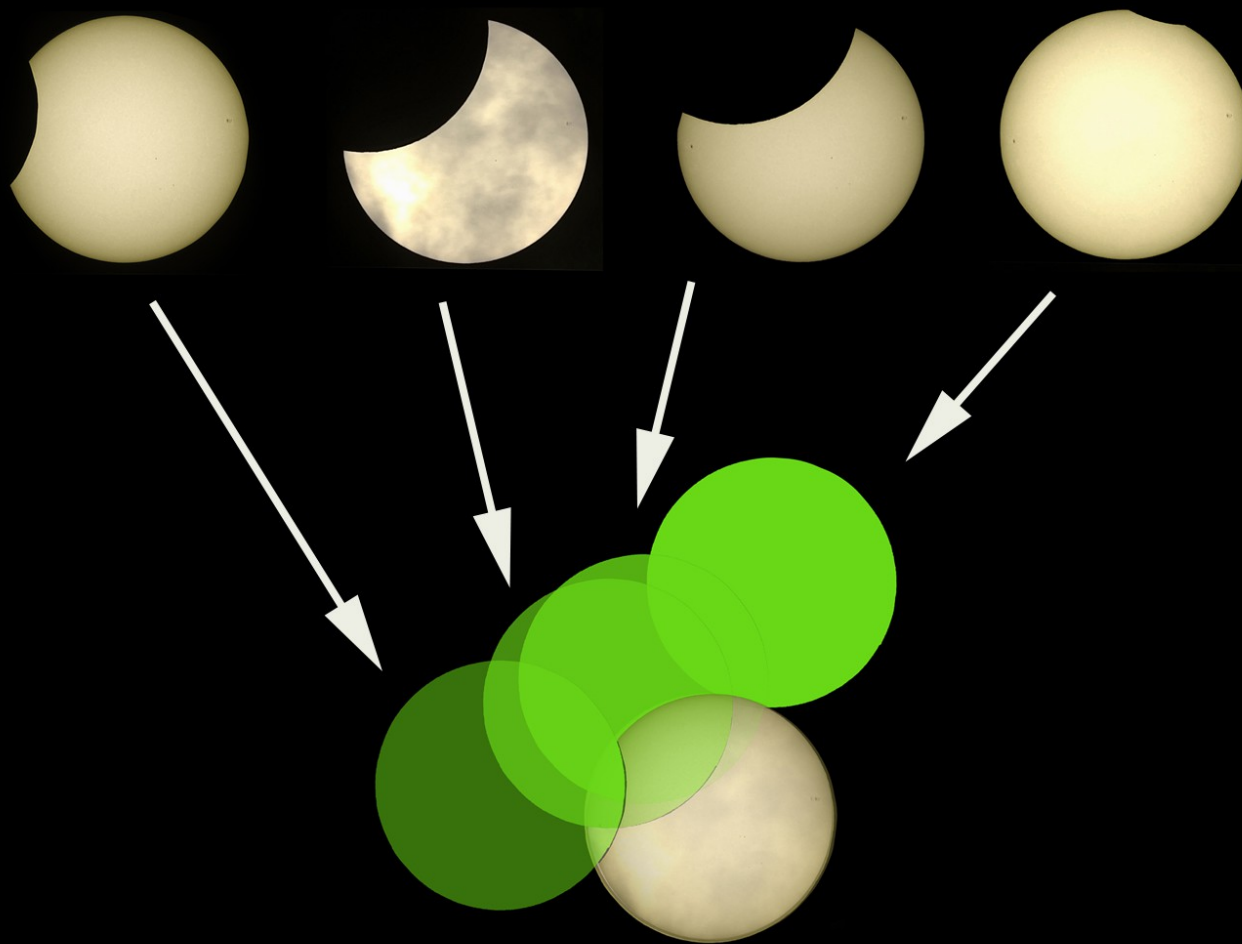
Größe der Erde: $R = 6371 \text{ km}$

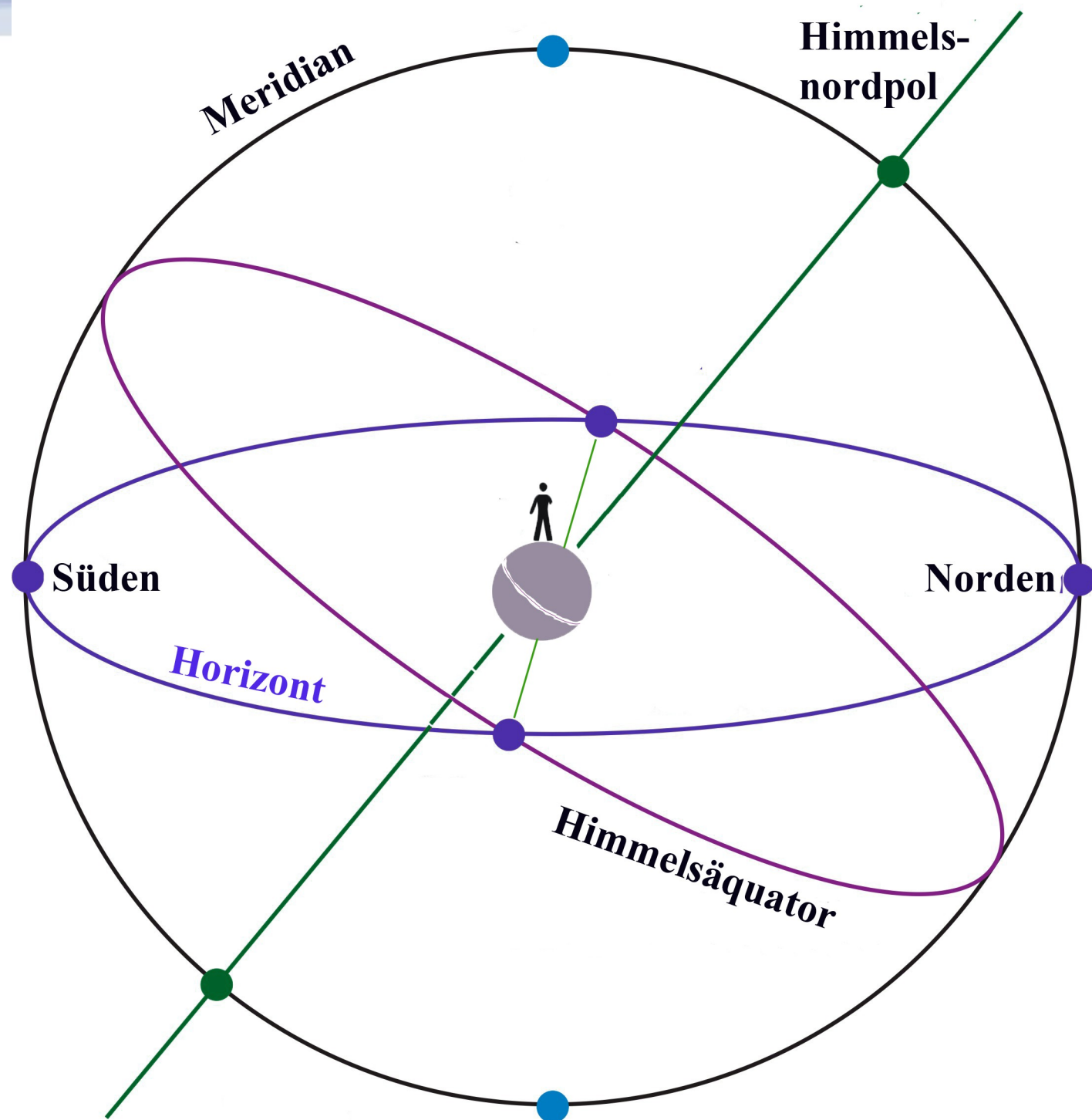
- Erstellung der scheinbaren Mondbahn bezüglich der Sonne durch Anpassung des Mondes an die Sonne und Ausrichtung bezüglich des Himmelsäquators

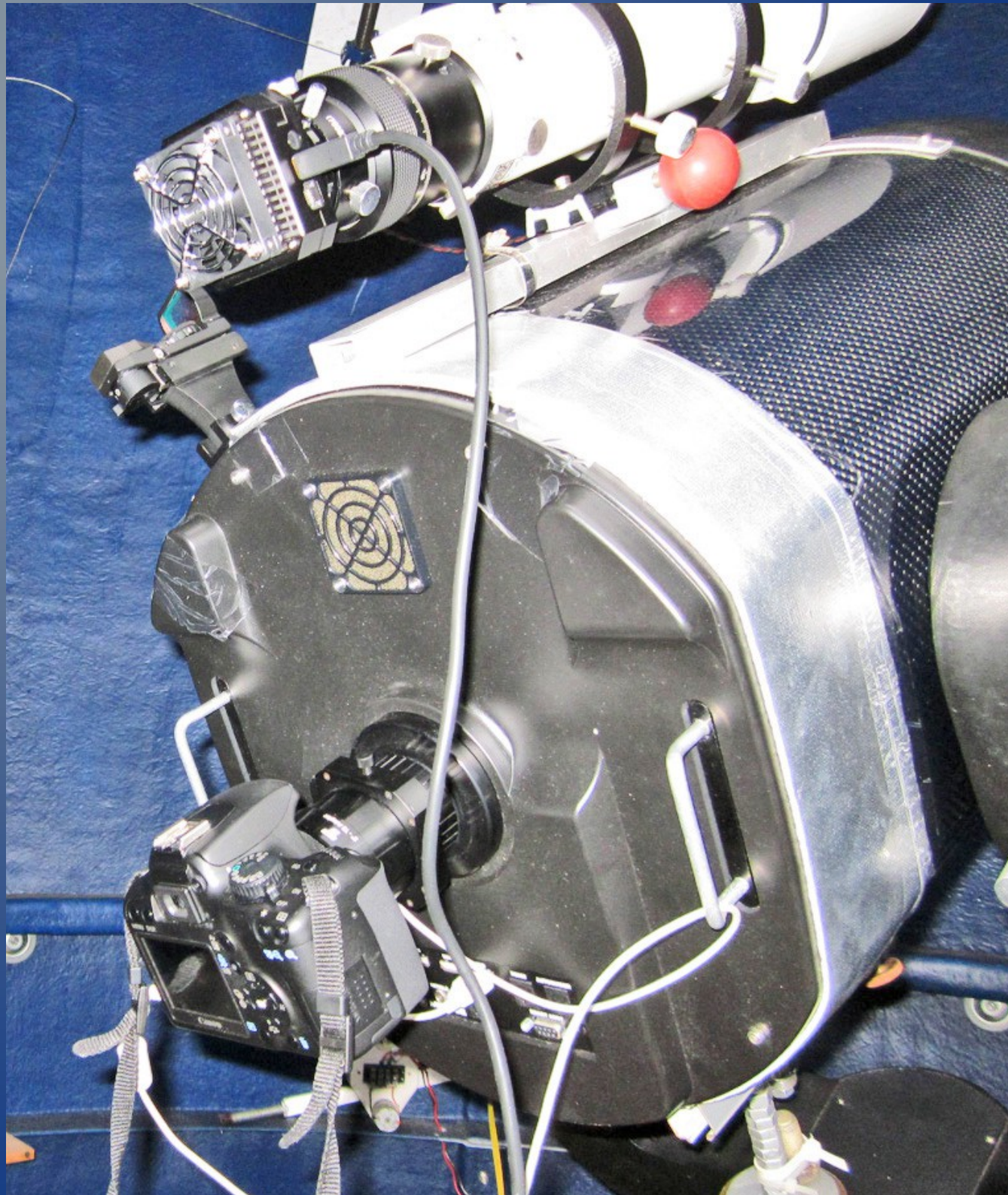
←
13:01 12:14 12:00 11:11
Meridian

**Partielle
Sonnenfinsternis
am 25.10.2022**

**Aufnahmeort:
Peine
N: 52,3°
O: 10,2°**







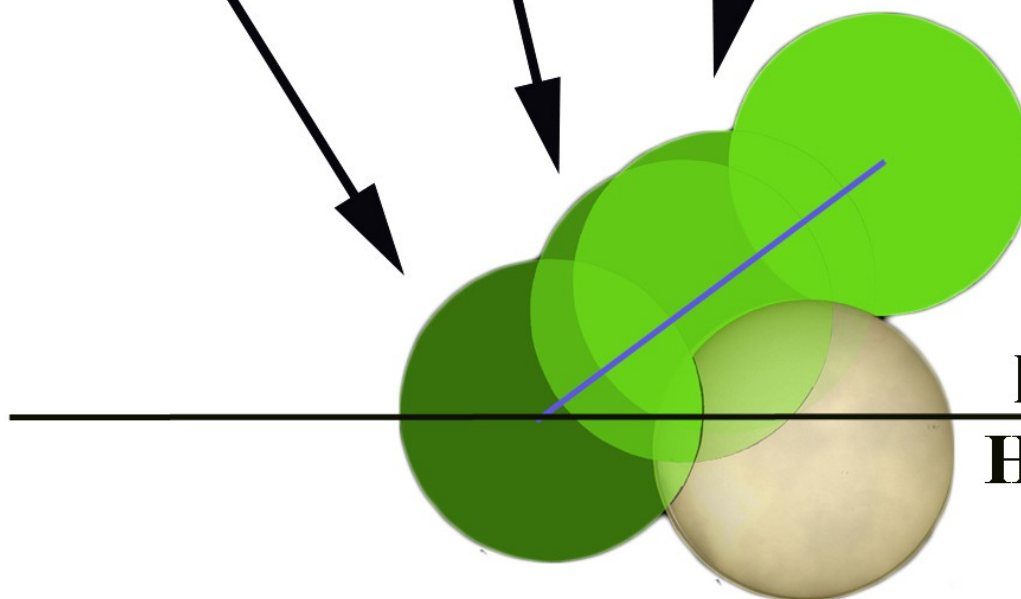
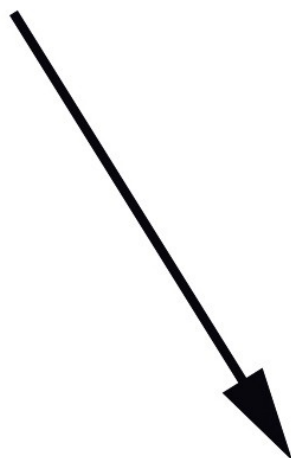
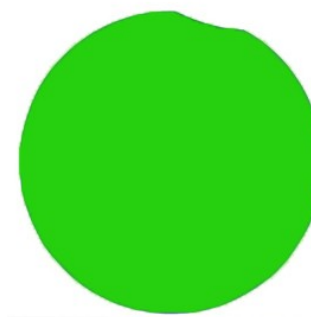


13:01
Meridian

12:14

12:00

11:11



parallel
Himmelsäquator

$$\frac{B \cdot 180 \cdot 60'}{f \cdot \text{PI}} = 51,78'$$

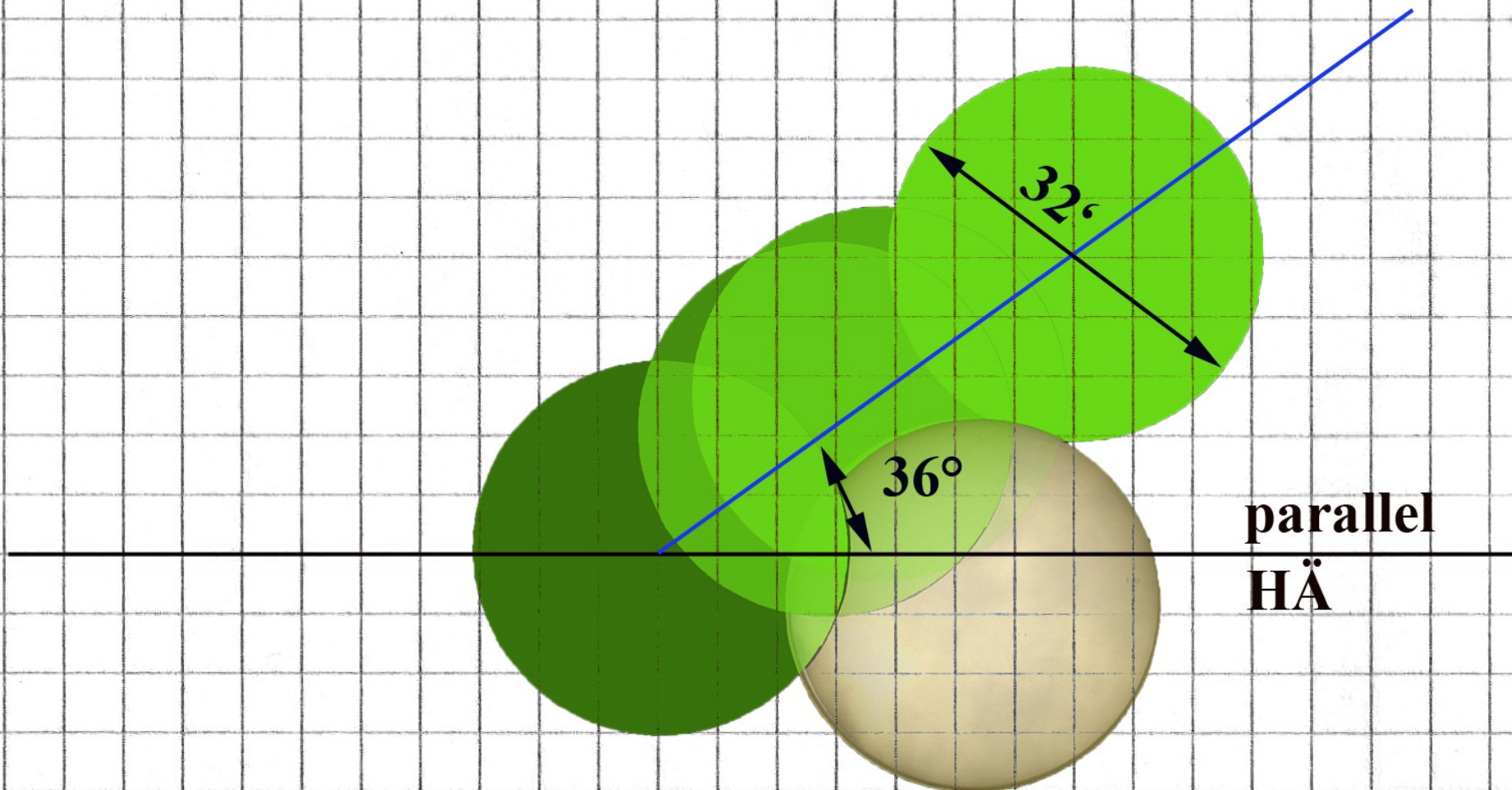
$$B = 9,64 \text{ mm}$$
$$f = 640 \text{ mm}$$

153mm

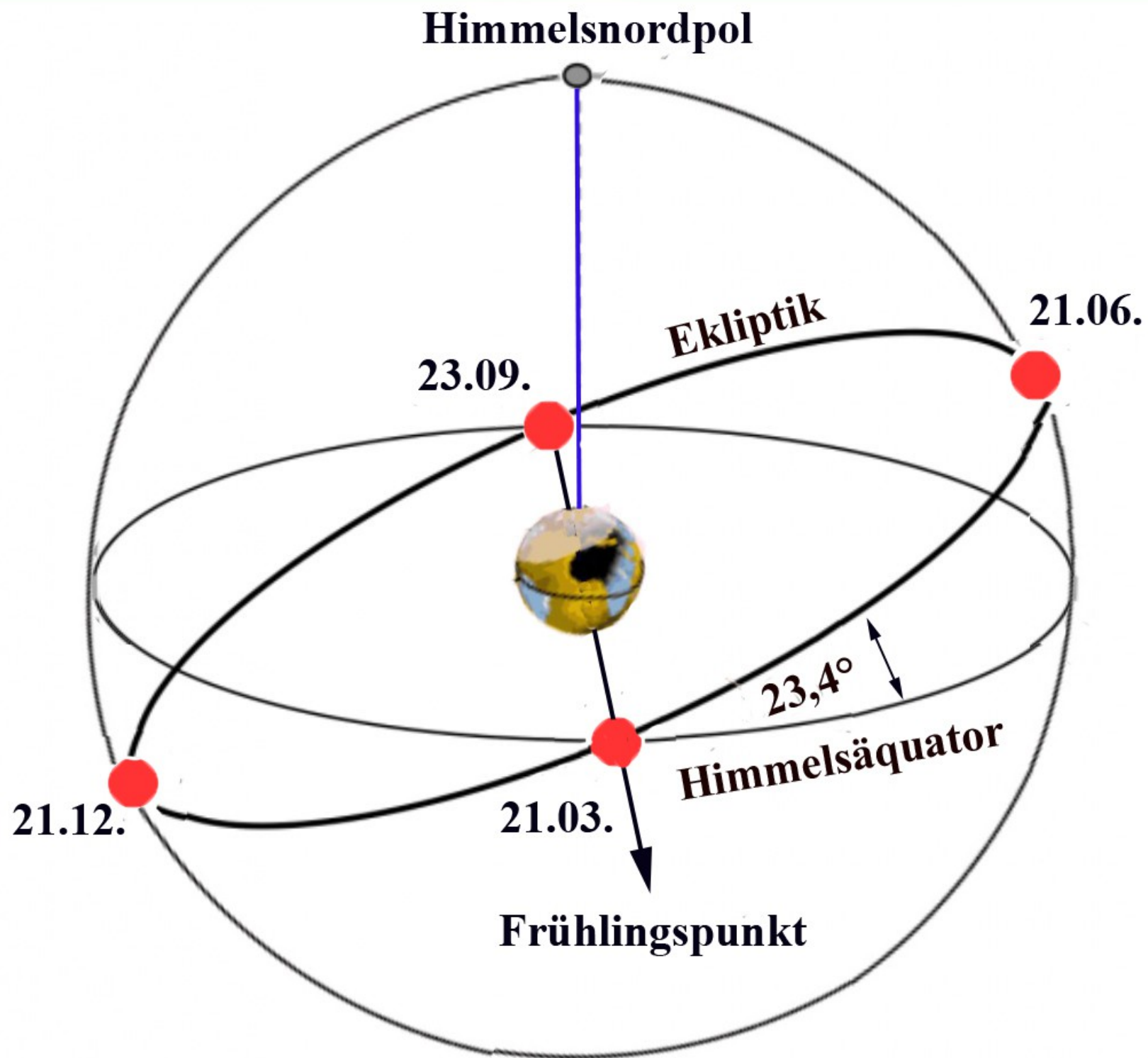
$$D = \frac{51,78' \cdot 153\text{mm}}{245\text{mm}}$$

$$D = 32'$$

$$245\text{mm} \hat{=} 51,78'$$



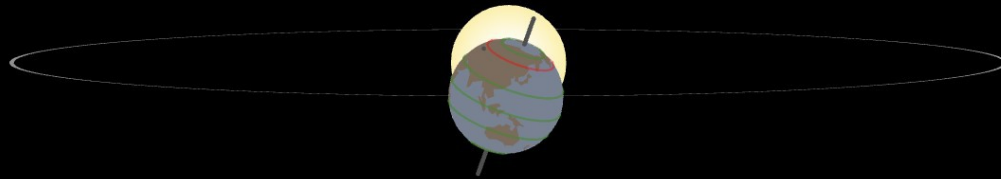
- Ermittlung des Verlaufs der Ekliptik gegenüber dem Himmelsäquator und Vergleich mit der scheinbaren Mondbahn



click and drag to change perspective

click and drag the earth to change its position on the orbital path

click and drag the red latitude circle to change the observer's latitude

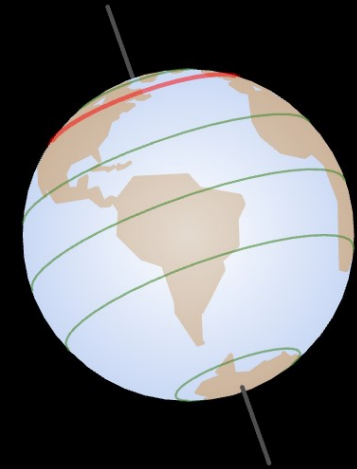


sun's declination: -13.2
sun's right ascension: 14.2h

☐ labels

- ☒ orbit view
- ☐ celestial sphere

☐ show subsolar point



observer's latitude: 52.3 N

☐ labels

- ☐ sunbeam spread
- ☒ sunlight angle

- ☒ view from sun
- ☐ view from side

sun's altitude: 24.5
observer latitude: 52.3 N



← N

S →

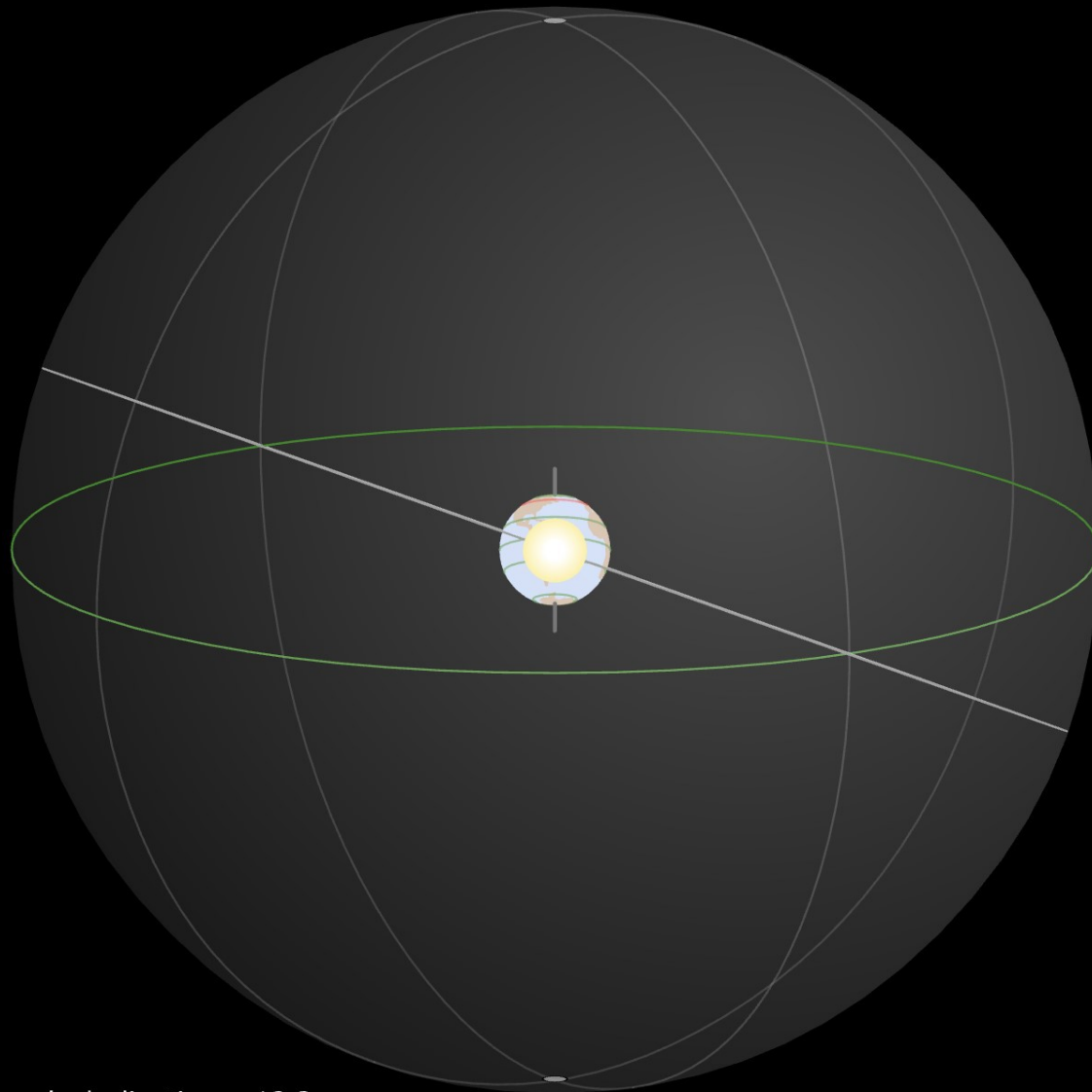
Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec

25 October

start animation

click and drag to change perspective

click and drag the sun to change its position on the ecliptic



sun's declination: -13.2

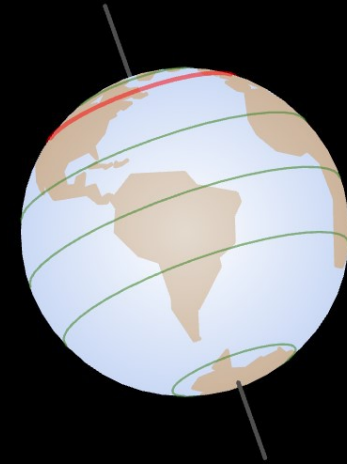
sun's right ascension: 14.2h

☐ labels

- ☐ orbit view
- ☒ celestial sphere

☐ show subsolar point

click and drag the red latitude circle to change the observer's latitude



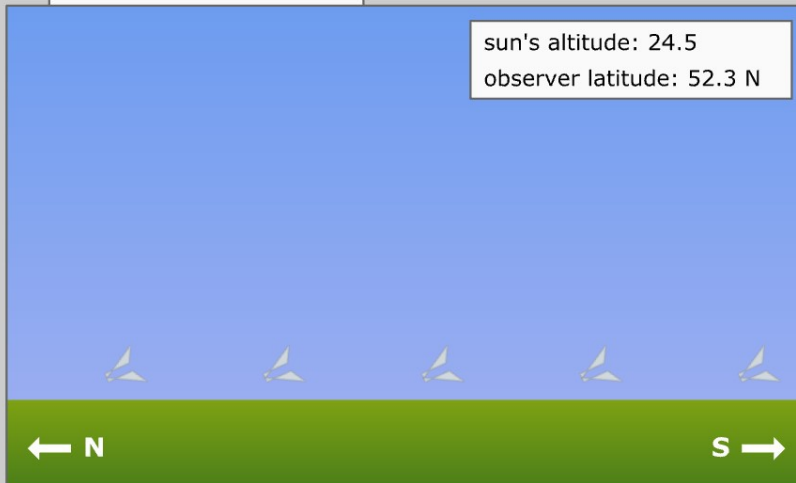
observer's latitude: 52.3 N

☐ labels

- ☐ sunbeam spread
- ☒ sunlight angle

- ☒ view from sun
- ☐ view from side

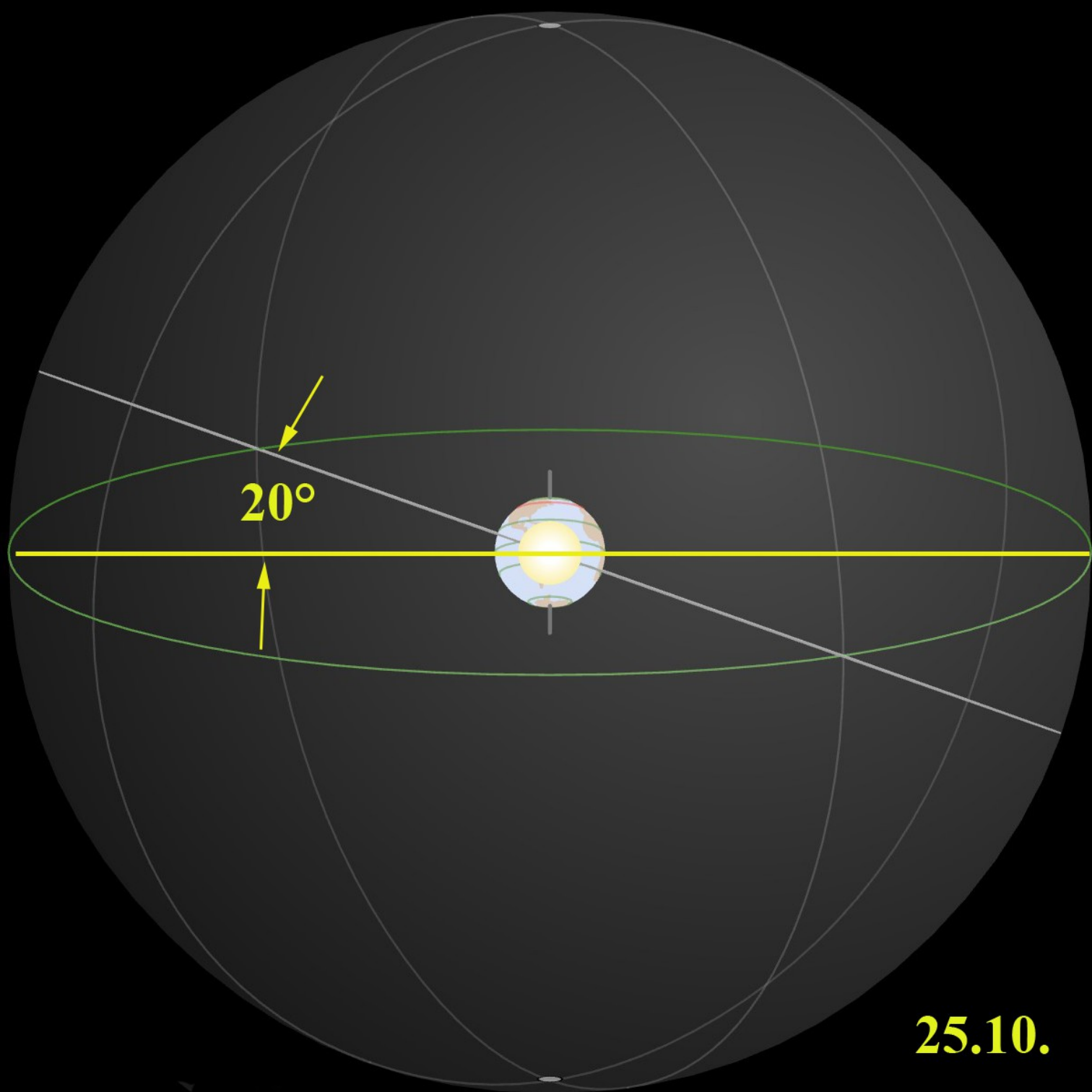
sun's altitude: 24.5
observer latitude: 52.3 N



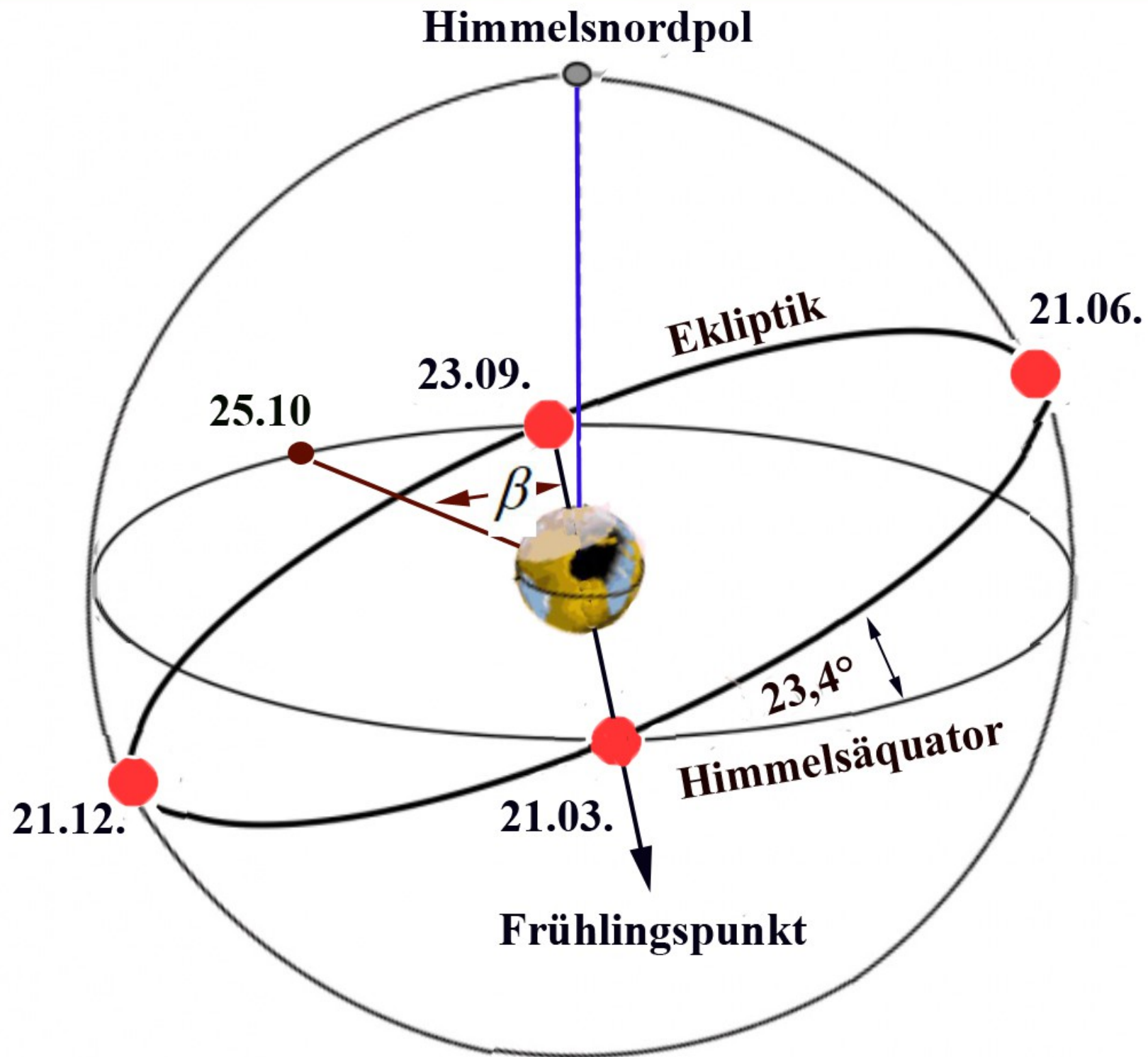
Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec

25 October

start animation



25.10.



Berechnung des scheinbaren Winkels φ zwischen
Himmelsäquator und Ekliptik am 25.10.2022.

Winkel am 23.09.2022: $\varepsilon = 23,4^\circ$

Winkel β den die Erde vom 23.09.2022 bis zum
25.10.2022 (32 Tage) zurückgelegt hat:

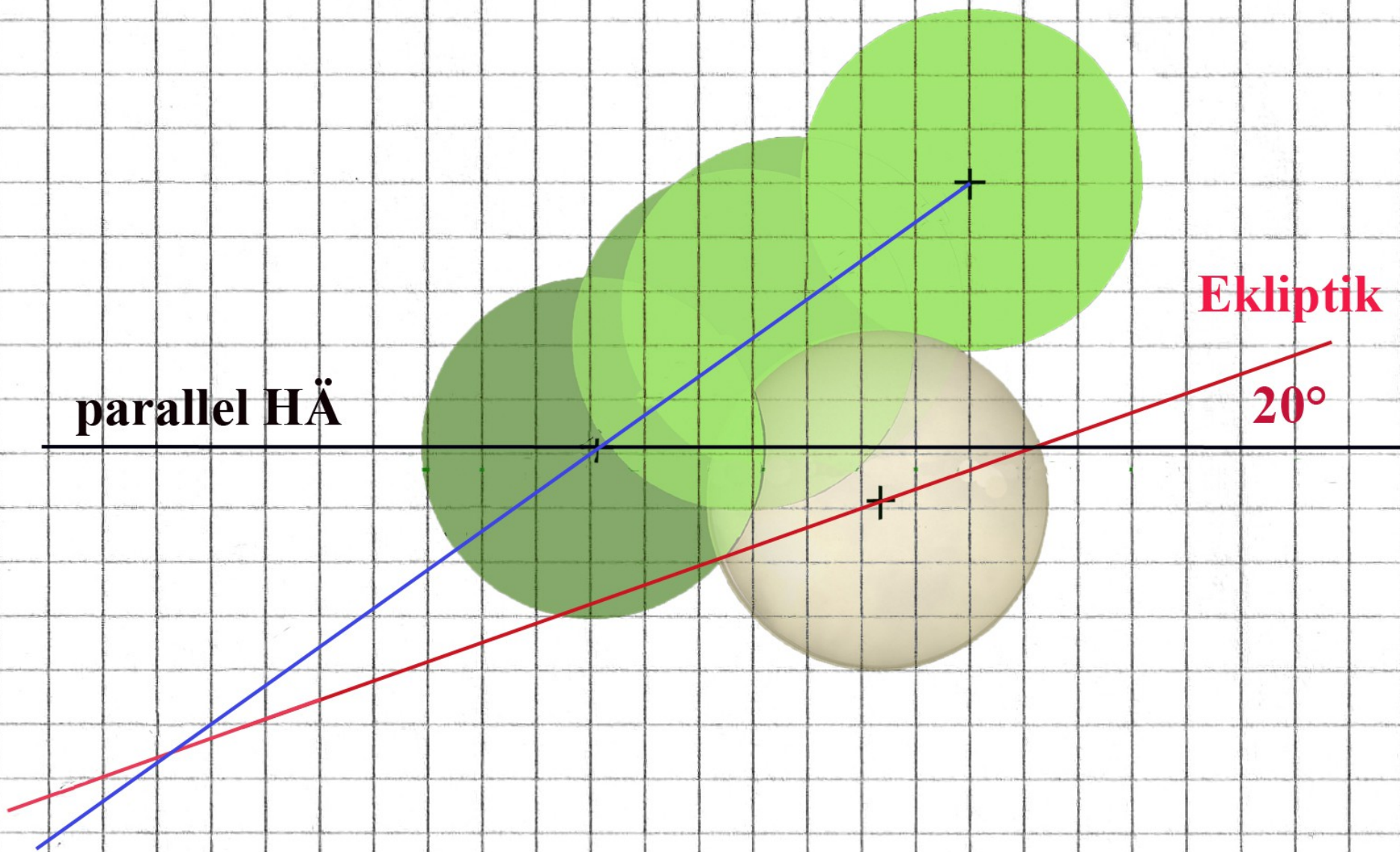
$$\beta = \frac{360^\circ \cdot 32\text{d}}{365,25\text{d}} = 31,5^\circ$$

$$\varphi \cong 23,4^\circ \cdot \cos \beta = 19,9^\circ \cong 20^\circ$$

parallel HÄ

Ekliptik

20°



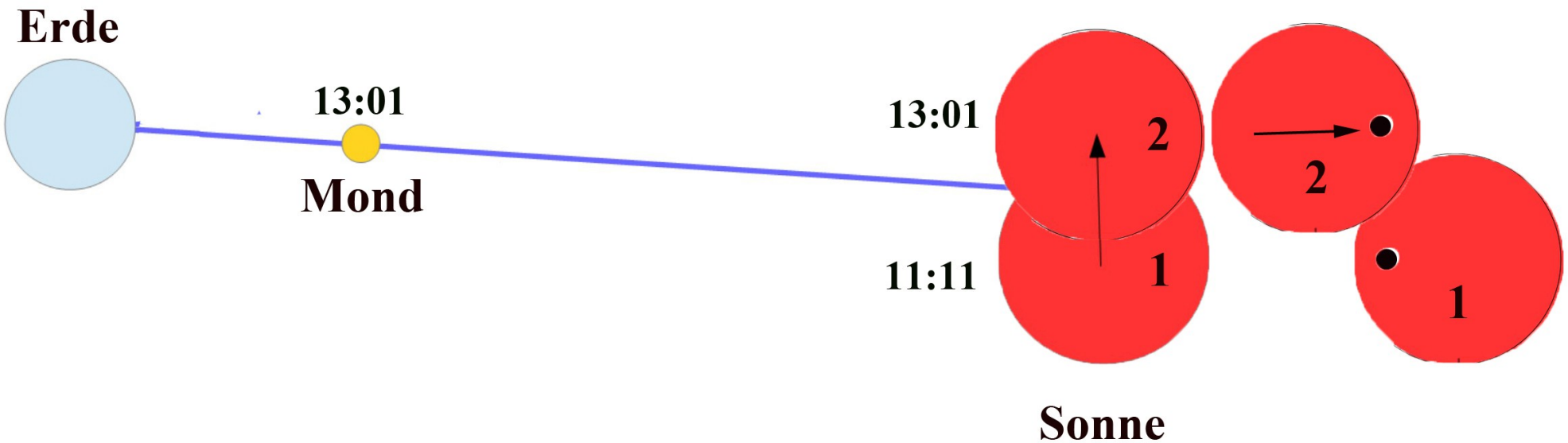
Festlegung eines Bezugspunktes für die Mondbahn:

Mondposition um 11:11 Uhr MESZ bezüglich der Sonnenposition und des Beobachtungsortes der Erde um die gleiche Zeit.

Was hat sich von 11:11Uhr bis 13:01 Uhr verändert?

Was hat sich von 11:11 bis 13:01 Uhr verändert?

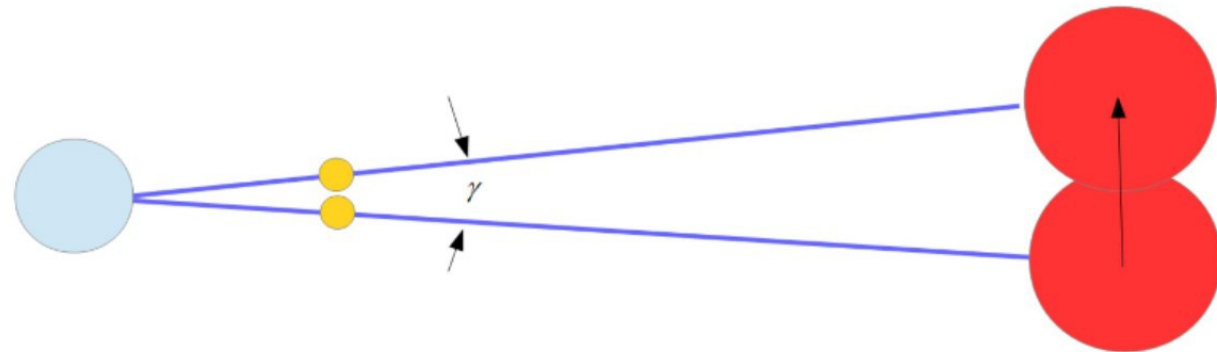
- die Position der Sonne durch die scheinbare Sonnenbewegung aufgrund des jährlichen Erdumlaufes***
- der Beobachtungssituation durch die Erdrotation***

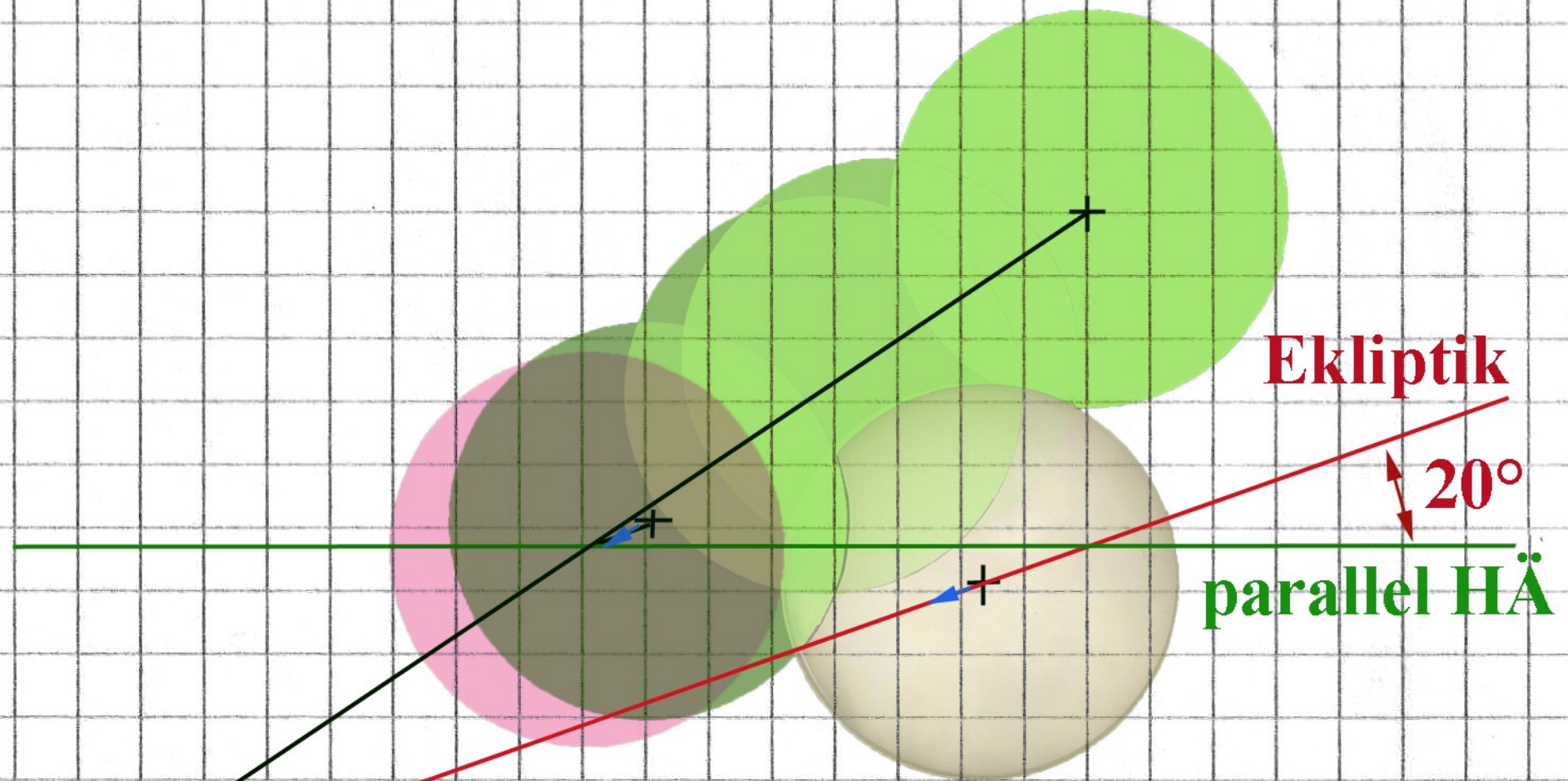


Um den Mond bezüglich der Position 1 der Sonne darzustellen muss er mit dem entsprechenden Wert nach links verschoben werden.

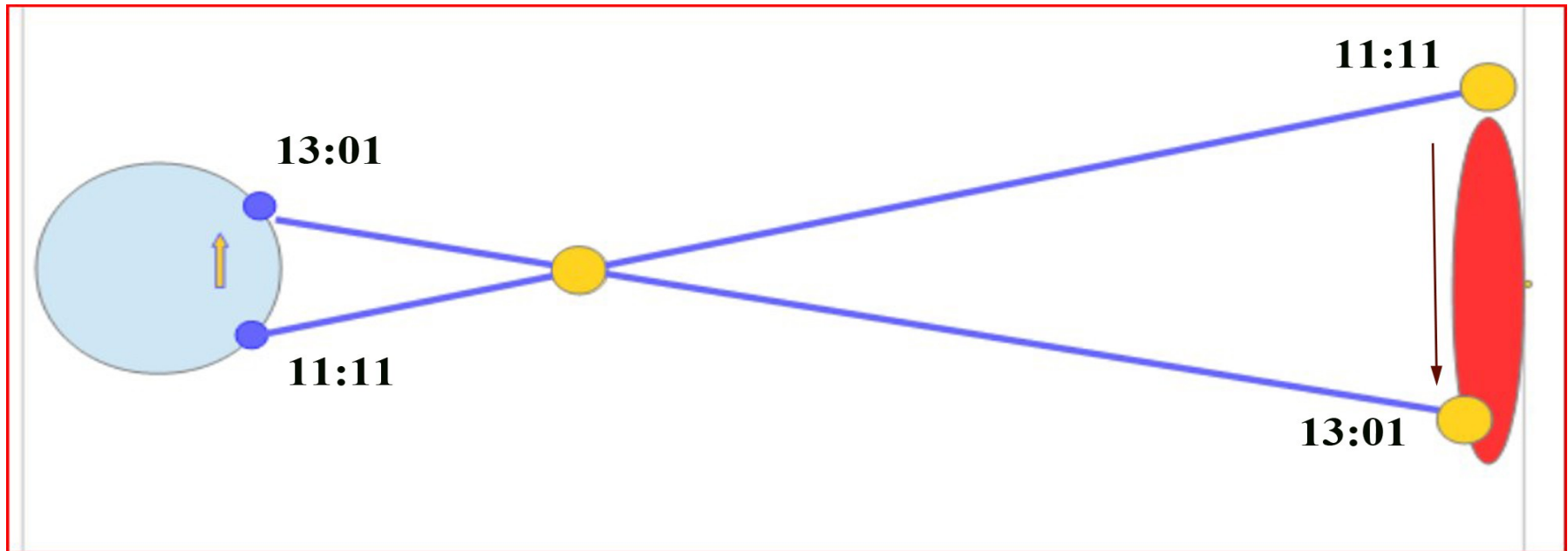
Die Sonne hat sich auf der Ekliptik um den Winkel γ von ihrem Mittelpunkt nach links unten bewegt.
Die Zeitdifferenz betrug von 11:11 Uhr bis 13:01 Uhr 1,83 Stunden.

$$\gamma = \frac{360^\circ \cdot 1,83\text{h}}{365,25 \cdot 24\text{h}} = 0,0752^\circ = \underline{\underline{4,51'}}$$

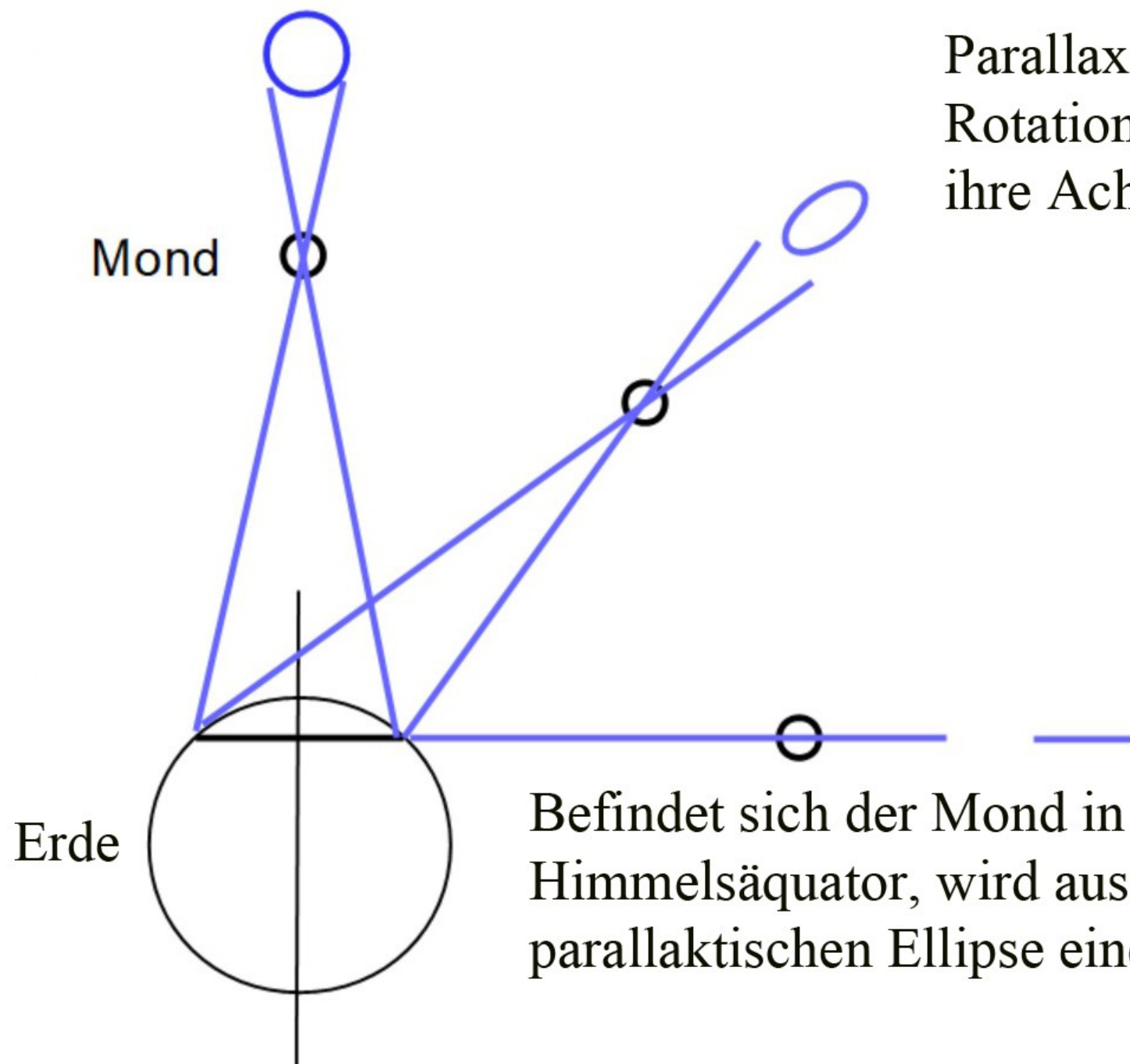




Auswirkungen durch die Erddrehung



Der Mond befindet sich im Vergleich zur Sonne nahe an der Erde. Durch die Drehung der Erde erscheint er daher unter einem anderen Winkel als die Sonne und verschiebt sich scheinbar gegenüber der Sonne (Parallaxeneffekt).

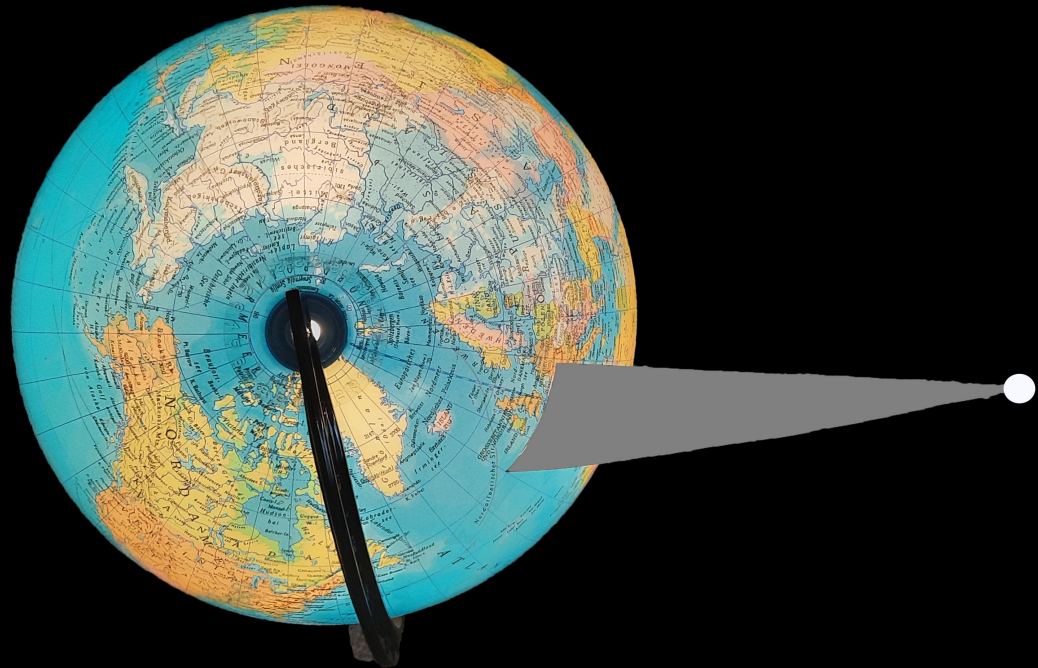


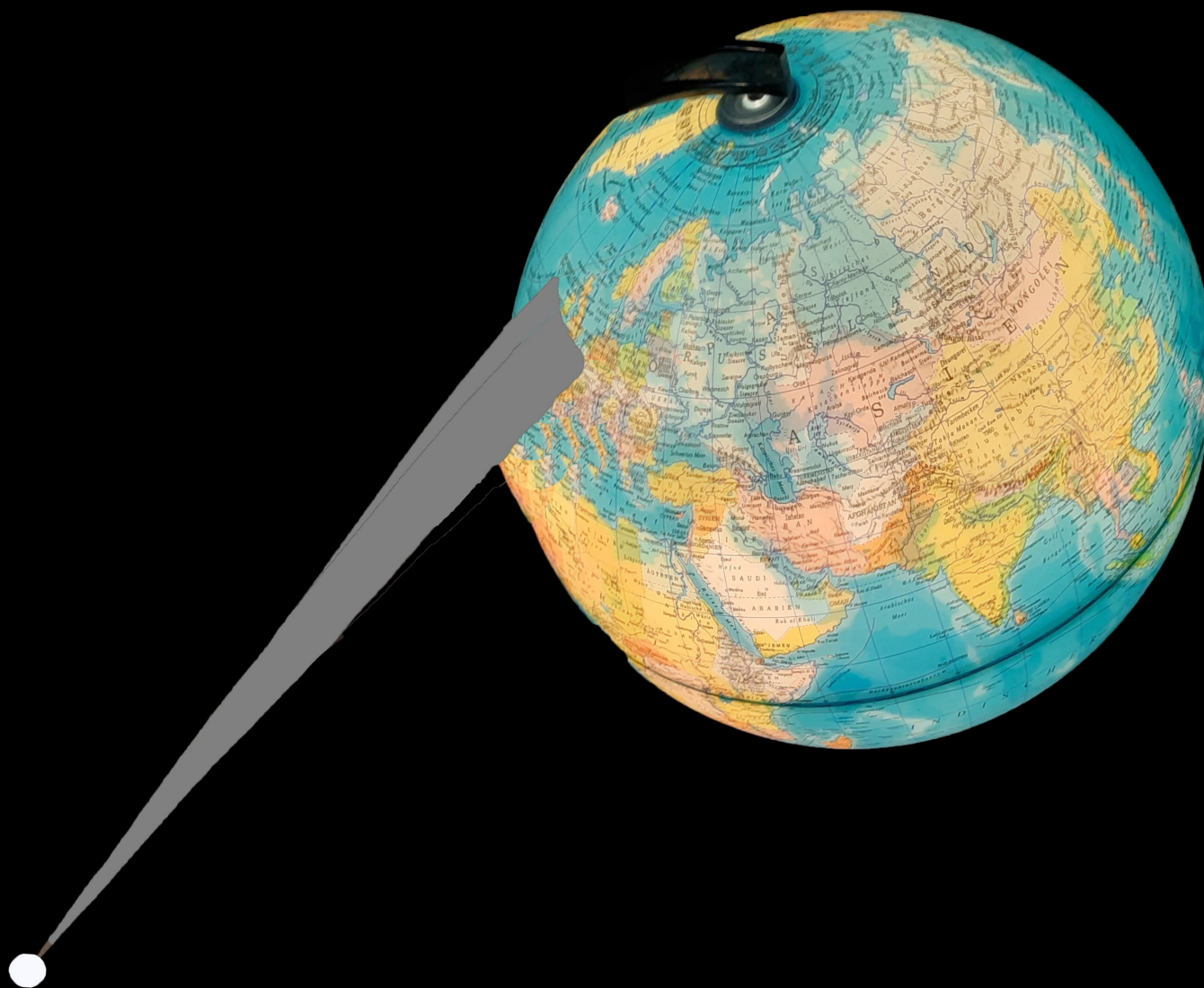
Parallaxen nach einer Rotation der Erde um ihre Achse.

Befindet sich der Mond in Richtung Himmelsäquator, wird aus der parallaktischen Ellipse eine Linie.

Bei geringen Abweichungen der Mondposition vom Himmelsäquator (Dek zwischen -15° und $+15^\circ$) und wenn die Finsternis in der Nähe des Meridians verläuft genügt eine Korrektur der Parallaxe parallel zum Himmelsäquator, die senkrechte Komponente braucht nicht berücksichtigt zu werden. Der dadurch auftretende Fehler ist vernachlässigbar.

Dieses war bei der Sonnenfinsternis am 25.10.2022 der Fall.

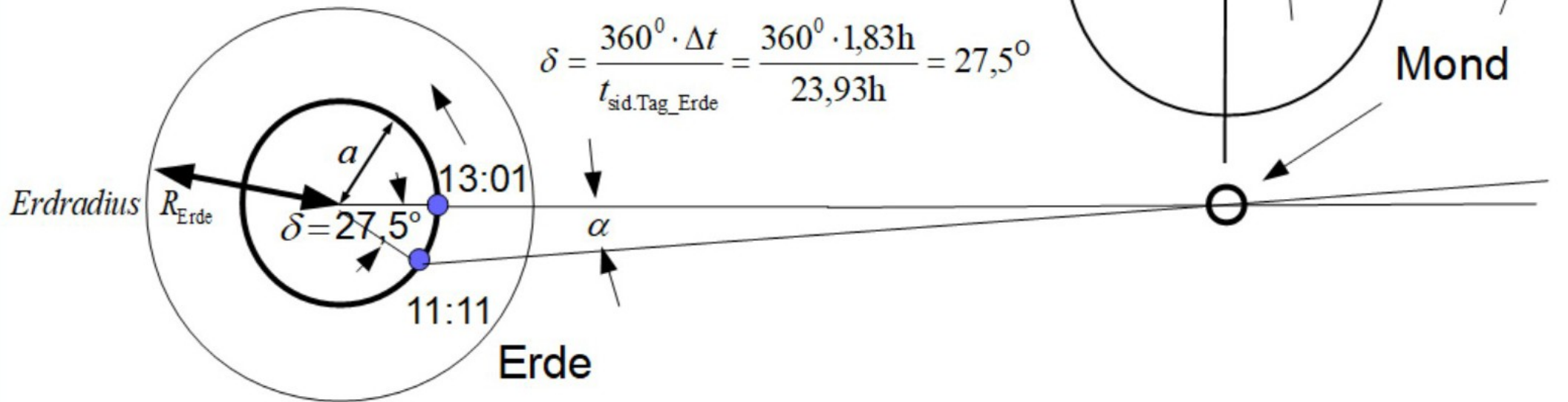






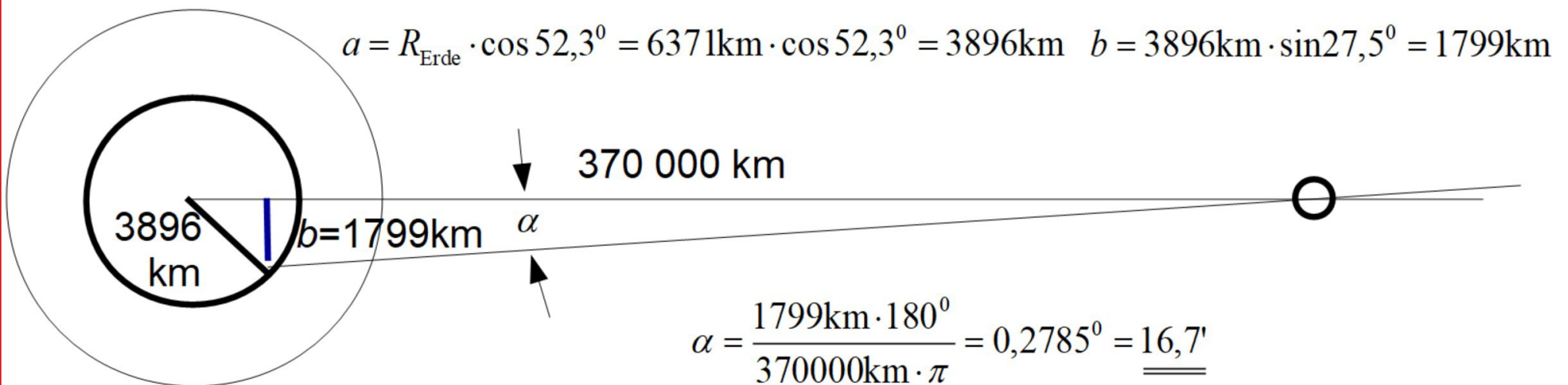
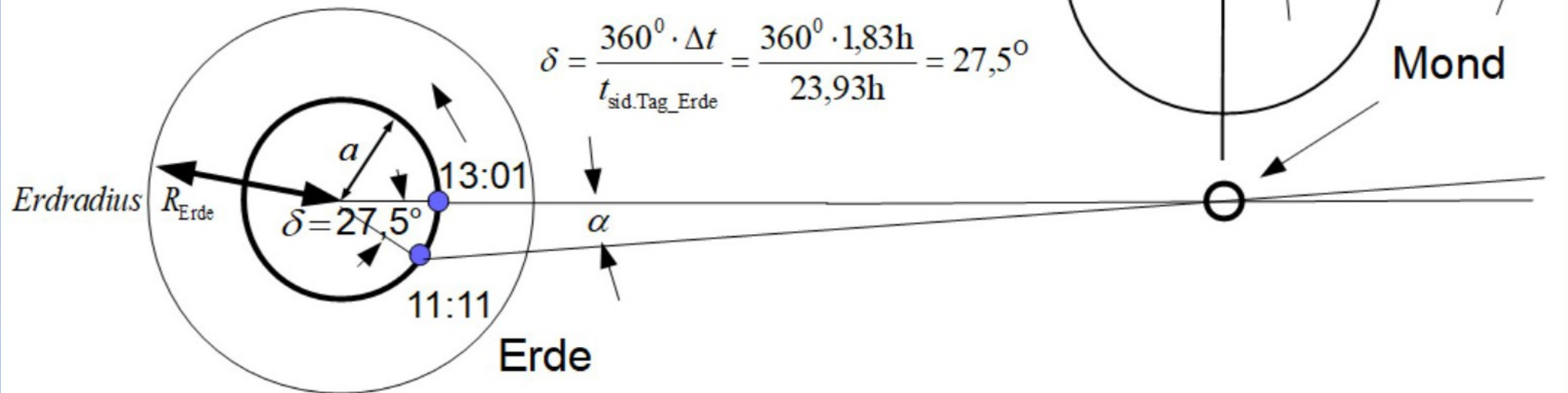
Entfernung Mond – Erde_{blaue Punkte} $d_{\text{Mond}} = 370000\text{km}$

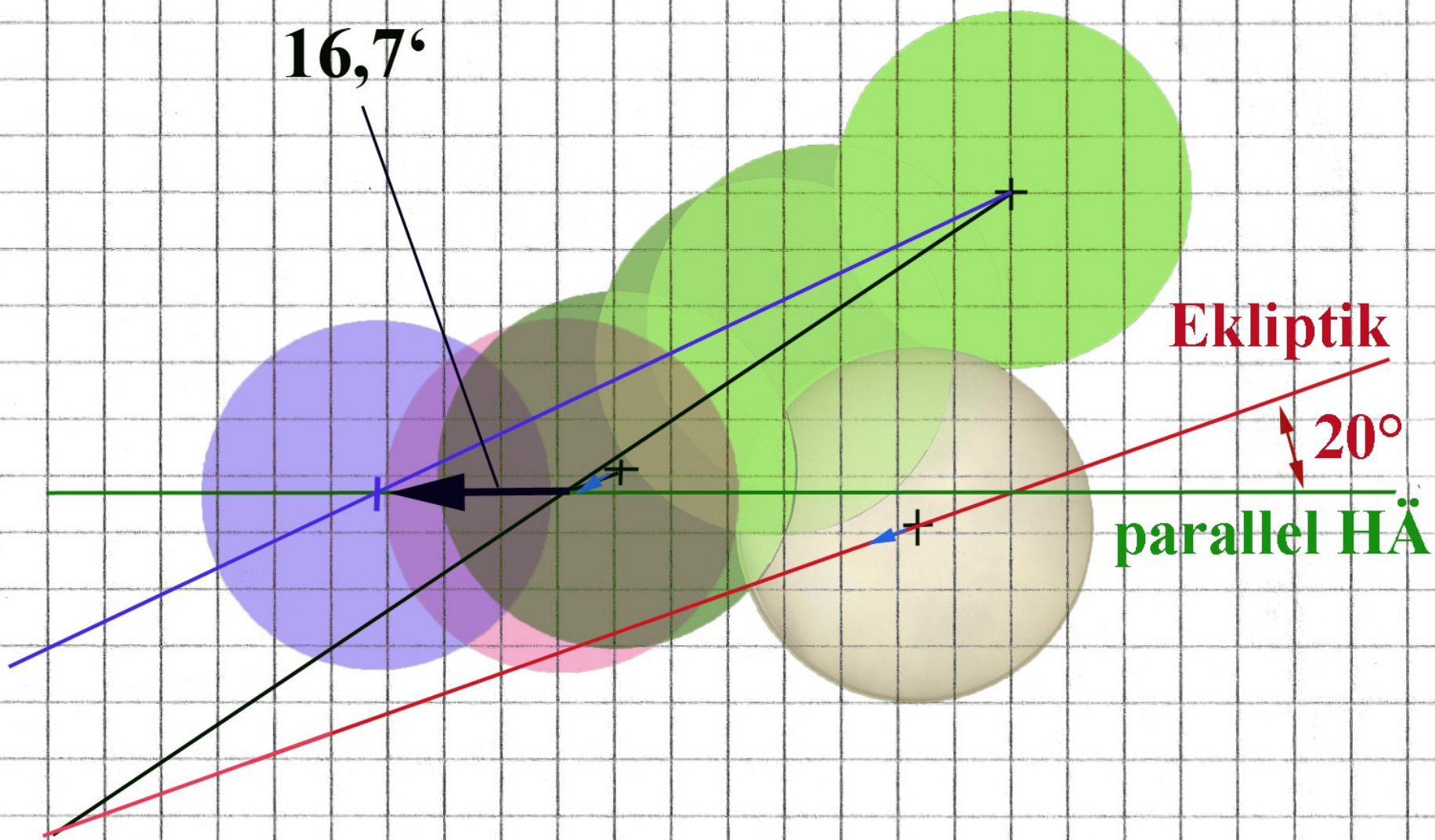
$R_{\text{Erde}} = 6371\text{km}$ Beobachtungsort Peine: N: $52,3^\circ$ O: $10,2^\circ$

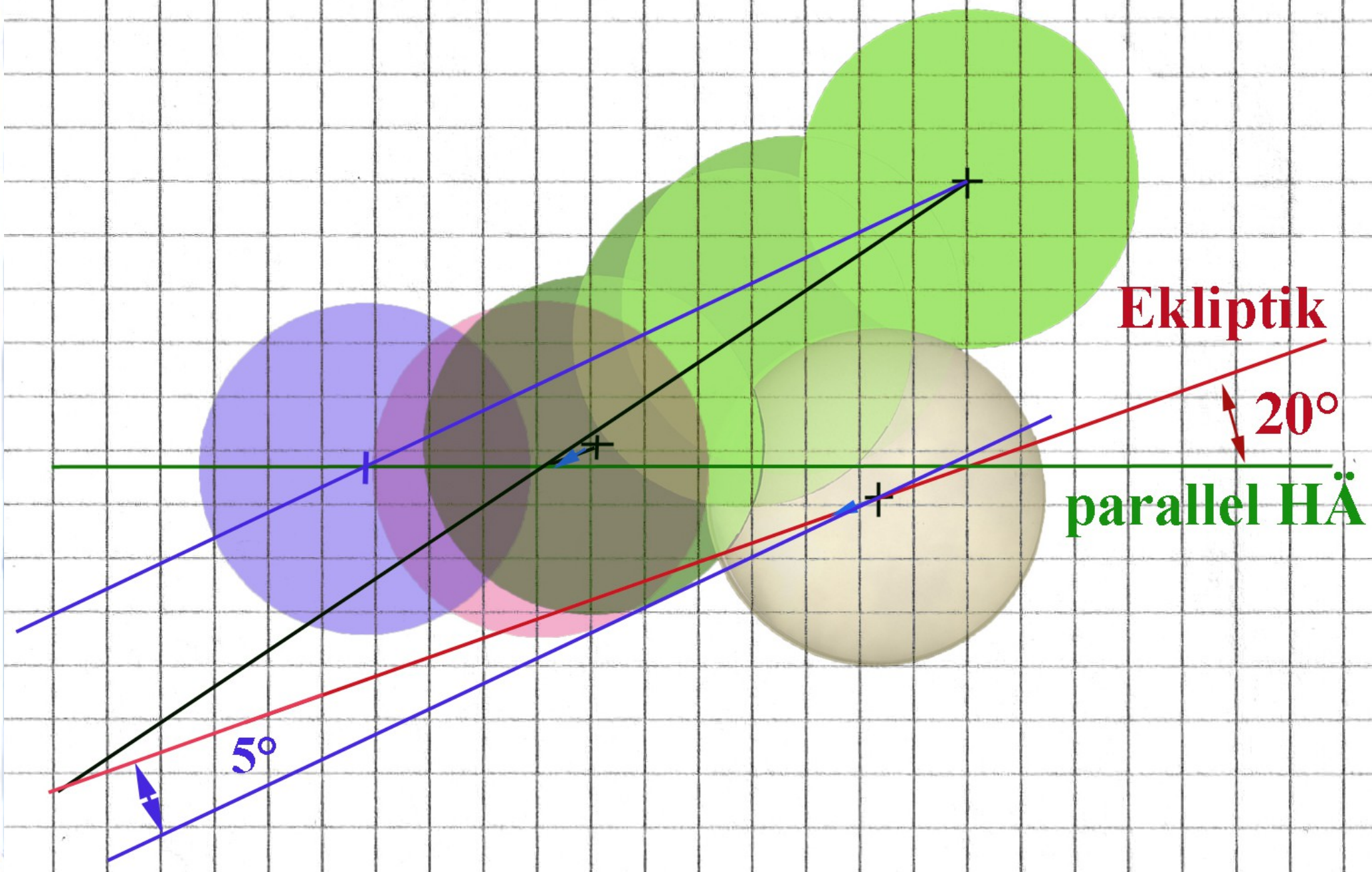


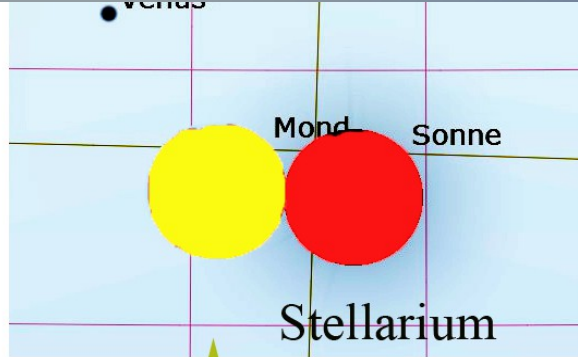
Entfernung Mond – Erde_{blaue Punkte} $d_{\text{Mond}} = 370000\text{km}$

$R_{\text{Erde}} = 6371\text{km}$ Beobachtungsort Peine: N: $52,3^\circ$ O: $10,2^\circ$

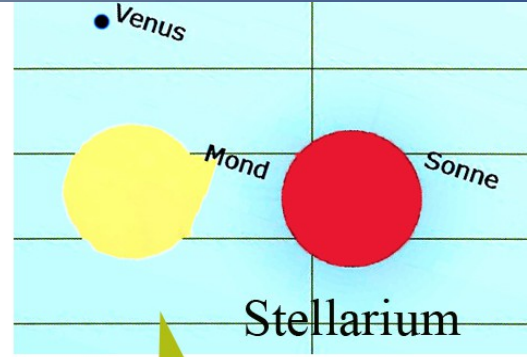








Blick von
Peine
13:13 Uhr



Blick 30°
westlich von
Peine, 13:13 Uhr
(Position wie
um 11:13 Uhr
in Peine)

Überprüfung
und
Bestätigung
mit
Stellarium

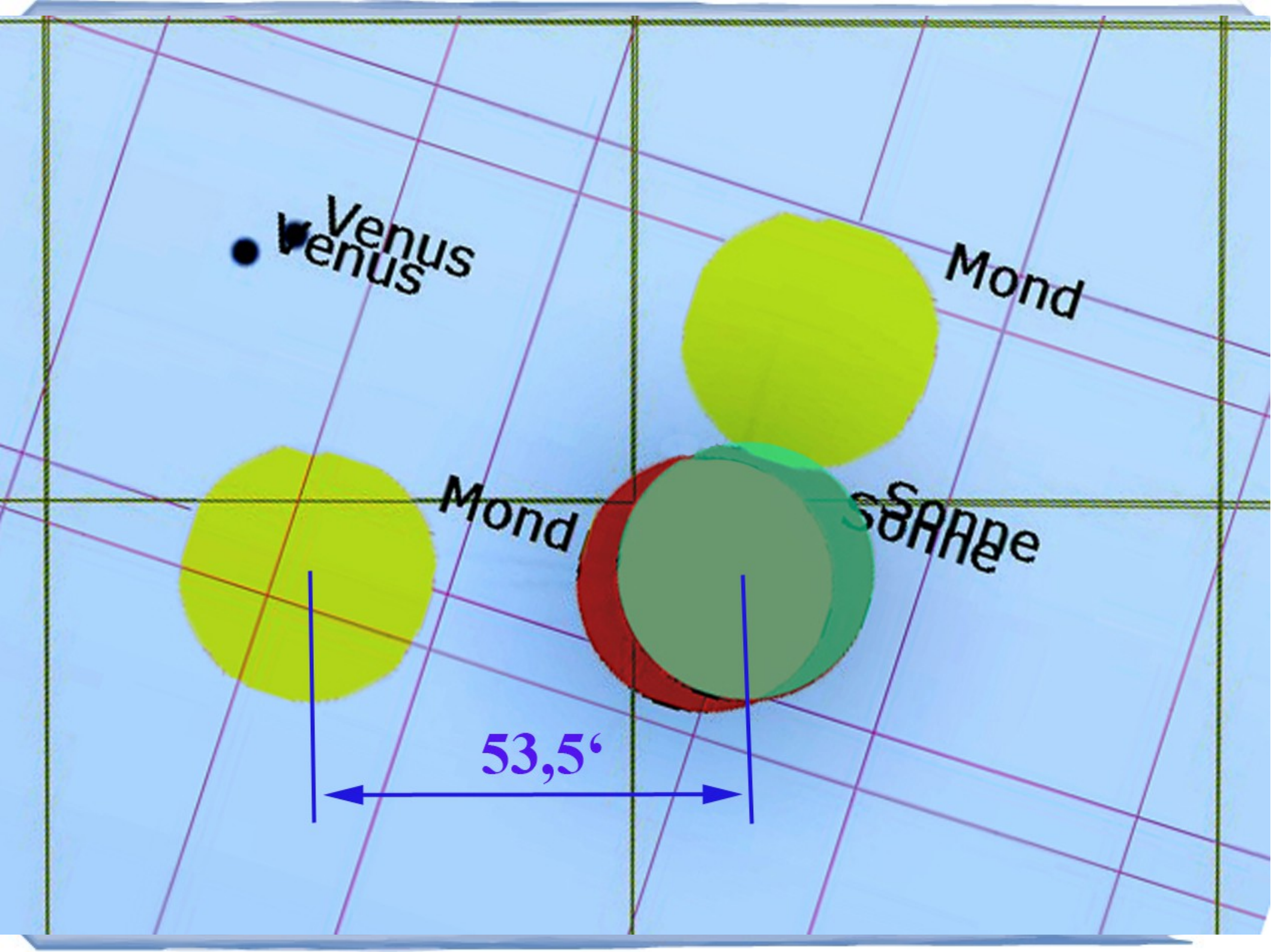
Venus
Venus

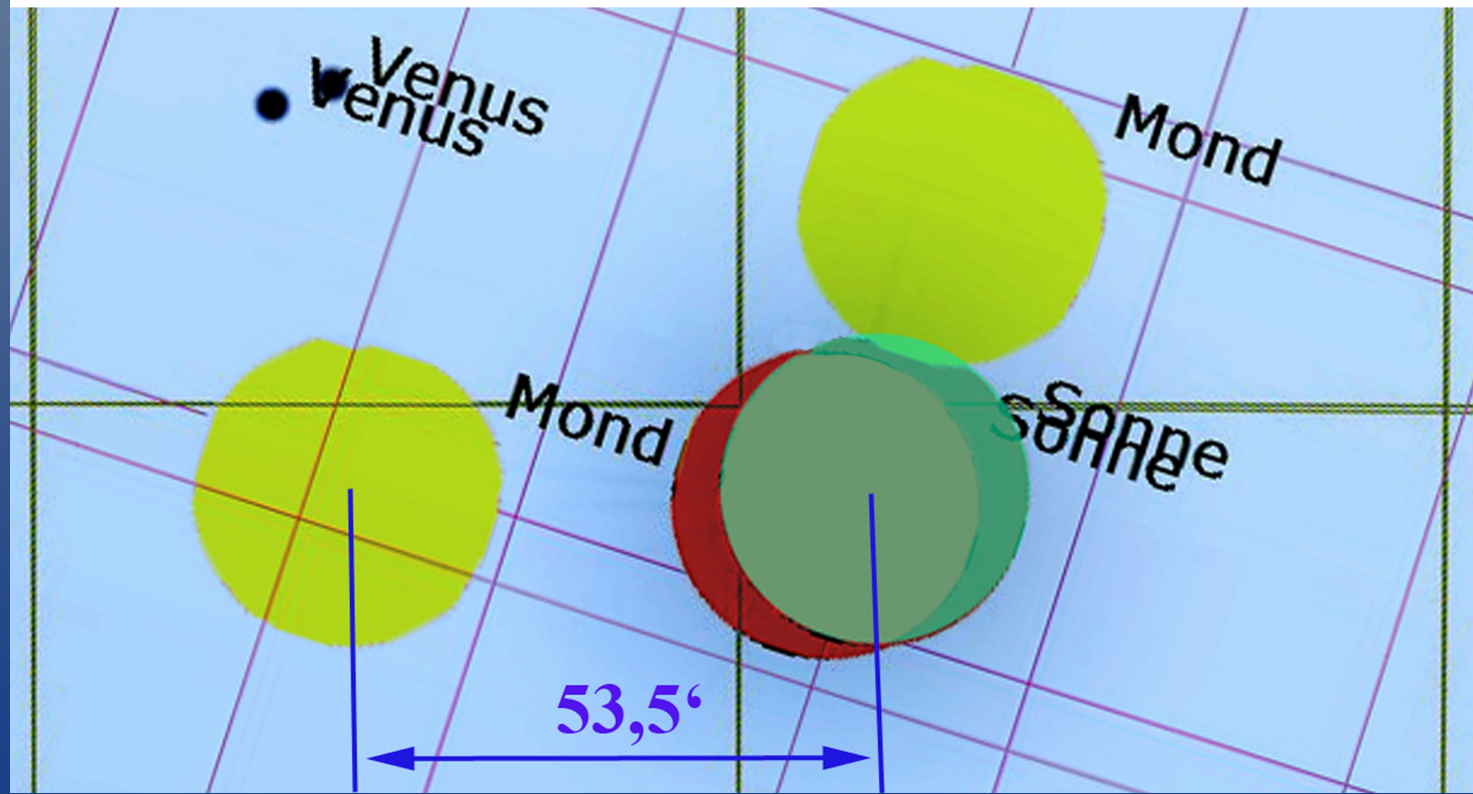
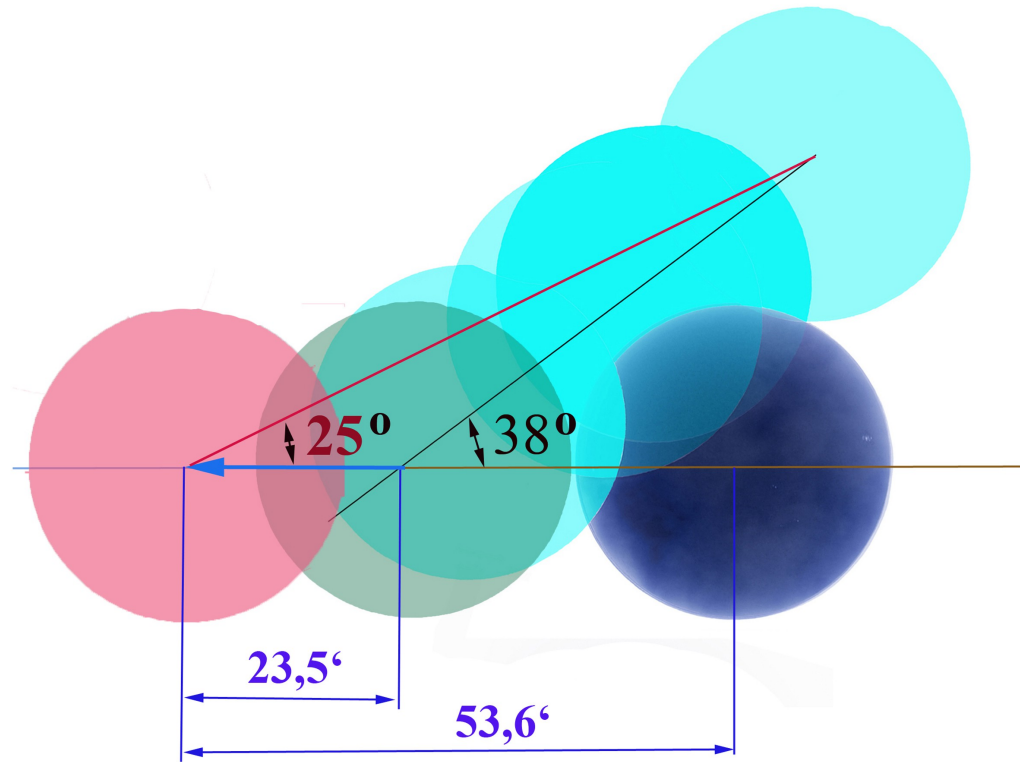
Mond

Mond

Sonne

53,5'





Bestimmung der siderischen Umlaufzeit des Mondes

Aufgabe: Bestimmen Sie die Umlaufzeit des Mondes um die Erde

- a) Gegeben ist die bezüglich der Erde korrigierte Mondbahn von 11:11 Uhr bis 13.01 Uhr am 25. Oktober 2022 (s. Bild oben). Mit diesen Daten soll die Umlaufzeit des Mondes um die Erde ermittelt werden. Vereinfacht ist von einer kreisförmigen Bahn auszugehen.
- b) Vergleichen Sie den ermittelten Wert mit der siderischen Umlaufzeit von 27,3 Tagen und begründen sie die Abweichung!
- c) Berechnen Sie die Umlaufzeit mit dem dritten Keplerschen Gesetz mit folgenden Vorgaben: Kreisförmige Bahn, Mondentfernung 374 000 km, Masse der Erde
- Vergleichen sie diesen Wert mit dem von a) .

$$M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Keplers Gesetz:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

T Umlaufzeit

r Entfernung

M Masse (hier kann die Erdmasse eingesetzt werden).

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$$

a) $\Delta\gamma = 62\text{mm} = 62'$ $T_{\text{U_Mond_a}} = \frac{1,83\text{h} \cdot 360 \cdot 60'}{62'} = 637,5\text{h} = \underline{\underline{26,56\text{d}}}$

a) $\Delta\gamma = 62\text{mm} = 62'$ $T_{\text{U_Mond_a}} = \frac{1,83\text{h} \cdot 360 \cdot 60'}{62'} = 637,5\text{h} = \underline{\underline{26,56\text{d}}}$

b) $\Delta A = \frac{26,56\text{d} - 27,3\text{d}}{27,3\text{d}} = -2,7\%$ Die Mondbahn wurde kreisförmig angenommen und der Mondabstand war geringer als im Mittel.

$$a) \quad \Delta\gamma = 62\text{mm} = 62' \quad T_{\text{U_Mond_a}} = \frac{1,83\text{h} \cdot 360 \cdot 60'}{62'} = 637,5\text{h} = \underline{\underline{26,56\text{d}}}$$

$$b) \quad \Delta A = \frac{26,56\text{d} - 27,3\text{d}}{27,3\text{d}} = -2,7\% \quad \text{Die Mondbahn wurde kreisförmig angenommen und der Mondabstand war geringer als im Mittel.}$$

$$c) \quad T_{\text{U_Mond_c}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r_{\text{Mond}}^3}{G \cdot M_{\text{Erde}}}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(374 \cdot 10^6)^3 \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}}} = 2,276 \cdot 10^6 \text{s} = \underline{\underline{26,35\text{d}}}$$

$$\Delta A_c = \frac{26,56\text{d} - 26,35\text{d}}{26,35\text{d}} \approx 0,8\%$$

Bedingungen zur Winkelbestimmung bei vergangenen Sonnenfinsternissen:

- **20.03.2015:** Optimal, Bedeckung sehr gut, Mondposition fast genau in Richtung Himmelsäquator, da Position beim Frühlingspunkt, Berechnung des Parallaxenwinkels etwas aufwändiger durch Abstand vom Meridian (Winkelberechnung wurde mit gleichem Ergebnis durchgeführt)
- **21.06.2021:** Nicht geeignet, da der Bedeckungsgrad zur Erstellung der scheinbaren Mondbahn nicht ausreichte.

Bedingungen zur Winkelbestimmung für zukünftige Sonnenfinsternisse:

- **29.03.2025:** Optimal, Bedeckung ausreichend, Mondposition fast genau in Richtung Himmelsäquator
- **12.08.2026:** Abweichung vom Himmelsäquator akzeptabel, aber Zeitpunkt spät und daher zusätzliche Korrektur erforderlich
- **02.08.2027:** Mit $\text{Dek} = +17^\circ$ eine schon etwas zu große Abweichung, vereinfachte Berechnung daher mit nicht zu vernachlässigbarem Fehler oder Berechnung mit zusätzlicher Korrektur

Zusammenfassung

- Partielle Sonnenfinsternisse sind in Deutschland immer wieder zu beobachten (z. B. 2015, 2021, 2022, 2025, 2026, 2027)**
- Von den 6 Finsternissen können bei dreien die Winkel nach dem hier verwendeten vereinfachten Verfahren genau bestimmt werden.**
- Mit leicht zu erstellenden Fotos und ihren Aufnahmedaten lässt sich eine für das Verständnis der Mondbahn und von Sonnen- und Mondfinsternissen wichtige Größe verhältnismäßig genau bestimmen.**
- Die Berechnung des Winkels sind nur Winkelfunktionen (keine sphärische Trigonometrie) notwendig.**



**Vielen
Dank für die
Mitarbeit und
viel Spaß bei den
Sonnenfinsternissen**

29.03.2025

12.08.2026

02.08.2027

Gegeben sind 4 Fotos von der partiellen Sonnenfinsternis 2022 mit Zeit- und Ortsangaben. Mit Hilfe dieser Daten soll der Winkel zwischen Ekliptik und Mondbahn ermittelt werden. Neben diesen Angaben werden dazu noch der Erddurchmesser und die Entfernung zum Mond benötigt.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen Ekliptik und Mondbahn.

a) Ermitteln Sie den scheinbaren Verlauf der Mondbahn gegenüber dem Himmelsäquator.

Anpassung des Mondes an die Sonne zur Erstellung der scheinbaren Mondbahn. Ausrichtung an den Himmelsäquator, der als Bezugslinie für die Mondbahn festgelegt wird. Als Bezugspunkt für die Mondbahn wird die Position um 11:11 Uhr festgelegt.

b) Ermitteln Sie den Verlauf der Ekliptik und trage Sie ihn durch den Mittelpunkt der Sonne in die Zeichnung ein!

Berechnung des scheinbaren Winkels φ zwischen Himmelsäquator und Ekliptik am 25.10.2022.

Winkel am 23.09.2022: $\varepsilon = 23,4^\circ$

Winkel β den die Erde vom 23.09.2022 bis zum 25.10.2022 (32 Tage) zurückgelegt hat:

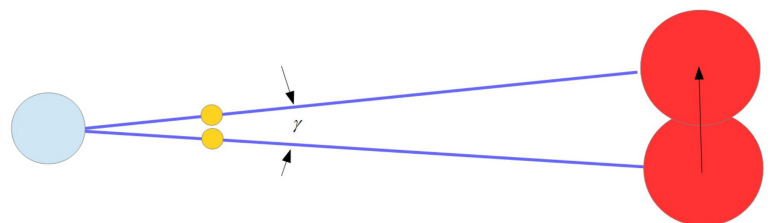
$$\beta = \frac{360^\circ \cdot 32\text{d}}{365,25\text{d}} = 31,5^\circ \quad \varphi \cong 23,4^\circ \cdot \cos \beta = 19,9^\circ \cong 20^\circ$$

c) Da als Bezugspunkt für die Mondbahn die Position um 11:11 Uhr festgelegt wurde, erfolgt die Korrektur an der Position um 13:01 Uhr (dunkelgrüner Mond). Durch die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde verschiebt sich der Mondschaten auf der Sonne scheinbar in entgegengesetzte Richtung. Um das zu korrigieren muss der dunkelgrüne Mond um den gleichen Winkel in die gleiche Bewegungsrichtung der Sonne verschoben werden.

Berechnen Sie den Winkel in Bogenminuten, den die Sonne scheinbar von 11:11 Uhr bis 13:01 Uhr zurückgelegt hat und zeichnen Sie den Mittelpunkt der korrigierten Position des dunkelgrünen Mondes und den neuen Mondbahnverlauf in das Bild oben auf Seite 2 ein.

Die Sonne hat sich auf der Ekliptik um den Winkel γ von ihrem Mittelpunkt nach links unten bewegt. Die Zeitdifferenz betrug von 11:11 Uhr bis 13:01 Uhr 1,83 Stunden.

$$\gamma = \frac{360^\circ \cdot 1,83\text{h}}{365,25 \cdot 24\text{h}} = 0,0752^\circ = \underline{\underline{4,51'}}$$

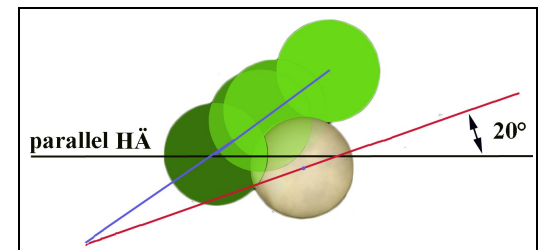
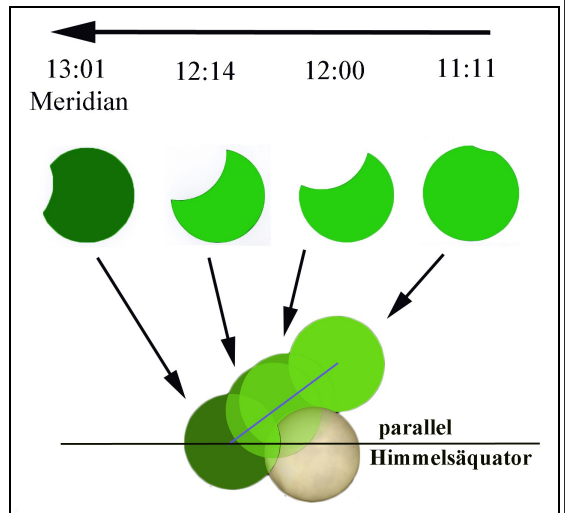


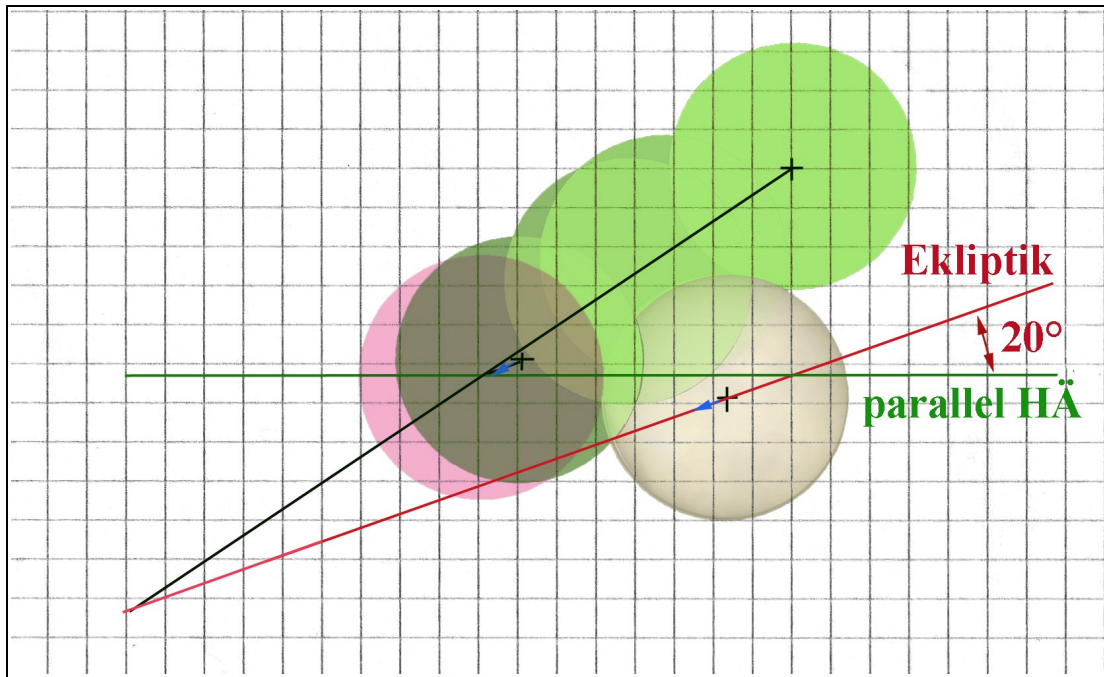
Partielle Sonnenfinsternis 2022

Zeit: 25.10.2022 zu den Zeiten unten (MESZ)

Ort: Peine, N: 52,3° O: 10,2°

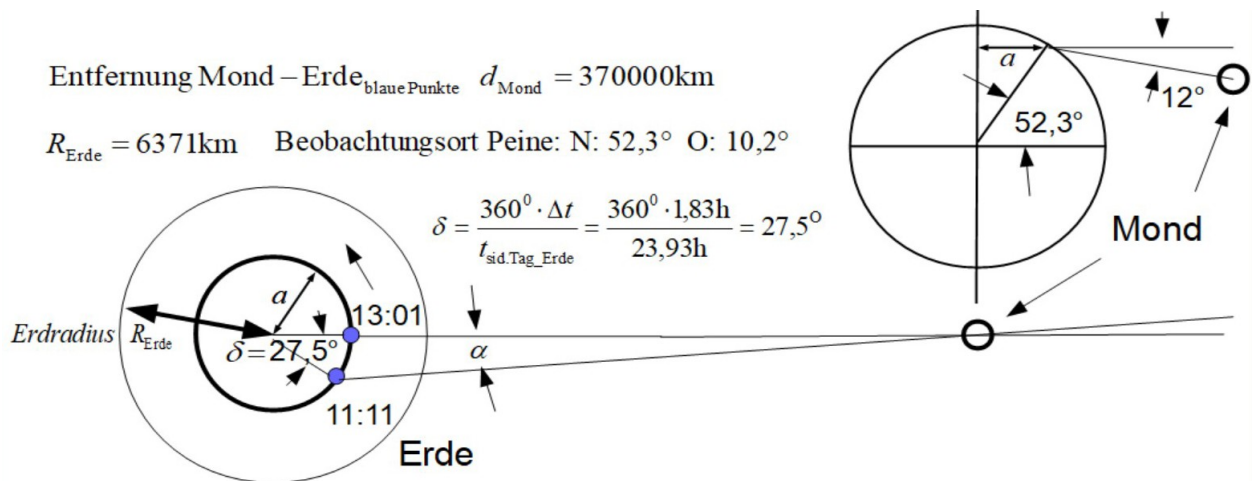
Aufnahmen mit parallaktischer Montierung



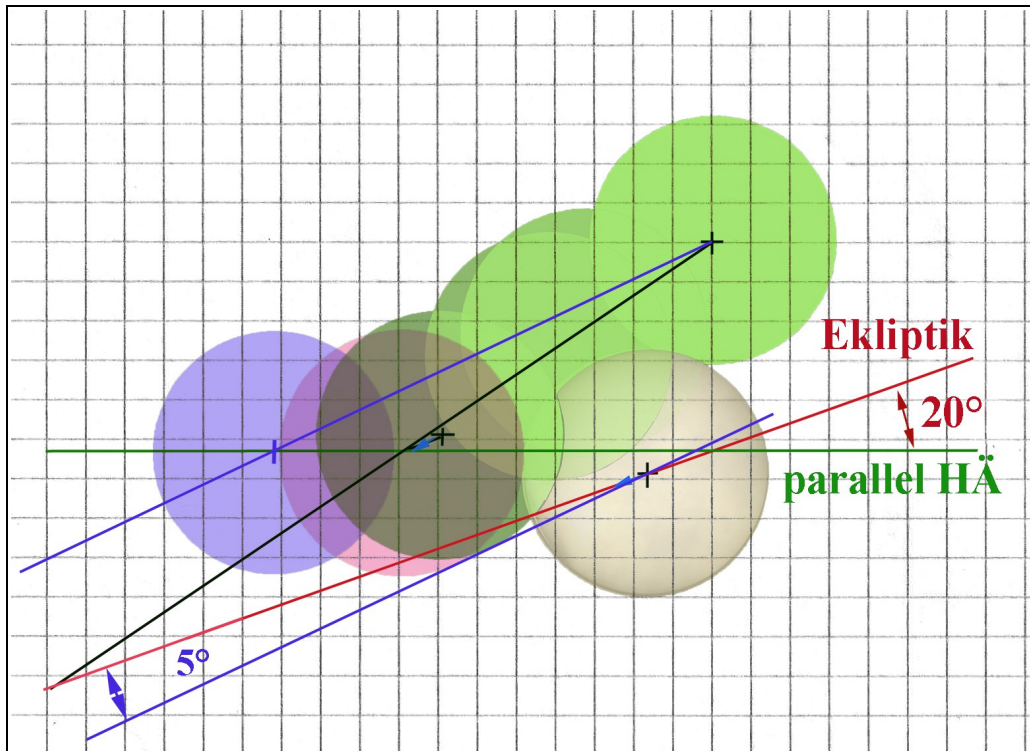
1mm $\hat{=}$ 1'

d) Durch die Drehung der Erde bei der Finsternis erscheint der Mond gegenüber der Sonne aufgrund des Parallaxeneffektes verschoben. Daher muss der rosa Mond so korrigiert werden, dass er, wie aus der Position um 11:11 Uhr betrachtet, aussehen würde. Ermitteln Sie den Verschiebungswinkel in Bogenminuten und verschieben Sie den rosa Mond (Mittelpunkt) um diesen Betrag in die richtige Richtung. Zeichnen Sie nun die korrigierte Mondbahn ein und bestimmen Sie den Winkel zwischen ihr und der Ekliptik.

Hinweis: Mondbahn und die Ebene des Breitenkreises befinden sich zu diesem Zeitpunkt nicht genau in einer Ebene, da die Deklination vom Mond -12° beträgt (s. Bild unten rechts). Dieses hat keinen Einfluss auf die Berechnung von α



Berechnung von α :



Aufgabe: Bestimmen Sie die Umlaufzeit des Mondes um die Erde

- a) Gegeben ist die bezüglich der Erde korrigierte Mondbahn von 11:11 Uhr bis 13.01 Uhr am 25. Oktober 2022 (s. Bild oben). Mit diesen Daten soll die Umlaufzeit des Mondes um die Erde ermittelt werden. Vereinfacht ist von einer kreisförmigen Bahn auszugehen.
- b) Vergleichen Sie den ermittelten Wert mit der siderischen Umlaufzeit von 27,3 Tagen und begründen sie die Abweichung!
- c) Berechnen Sie die Umlaufzeit mit dem dritten Keplerschen Gesetz mit folgenden Vorgaben: Kreisförmige Bahn, Mondentfernung 374 000 km, Masse der Erde $M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Vergleichen sie diesen Wert mit dem von a) .

Keplers Gesetz:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

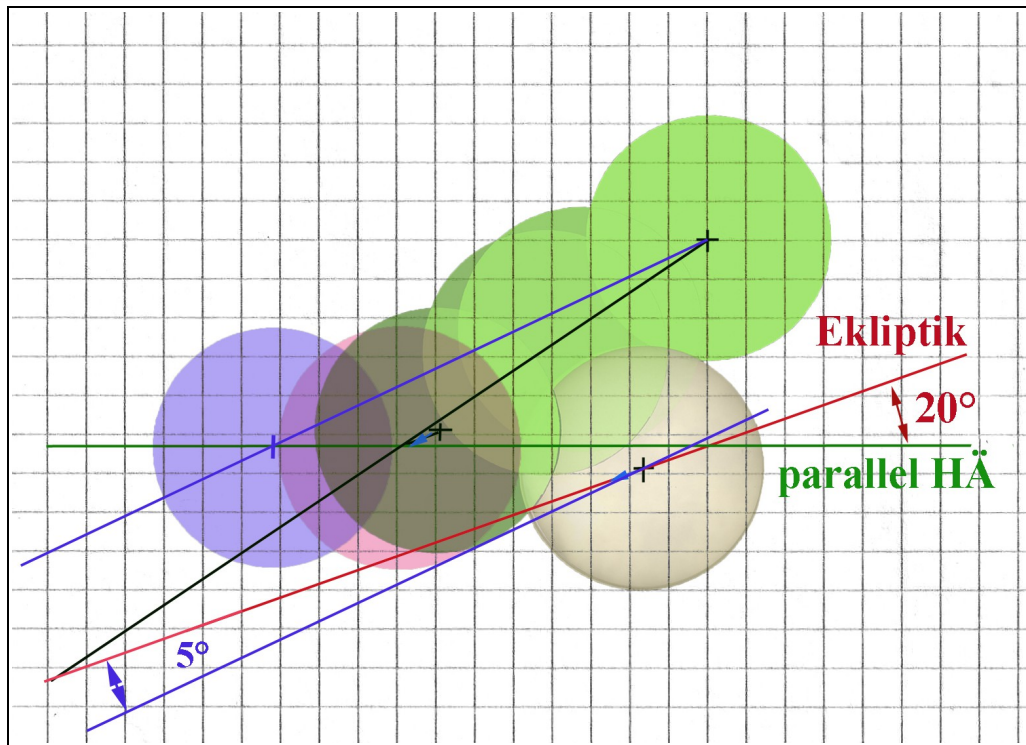
T Umlaufzeit

r Entfernung

M Masse (hier kann die Erdmasse eingesetzt werden).

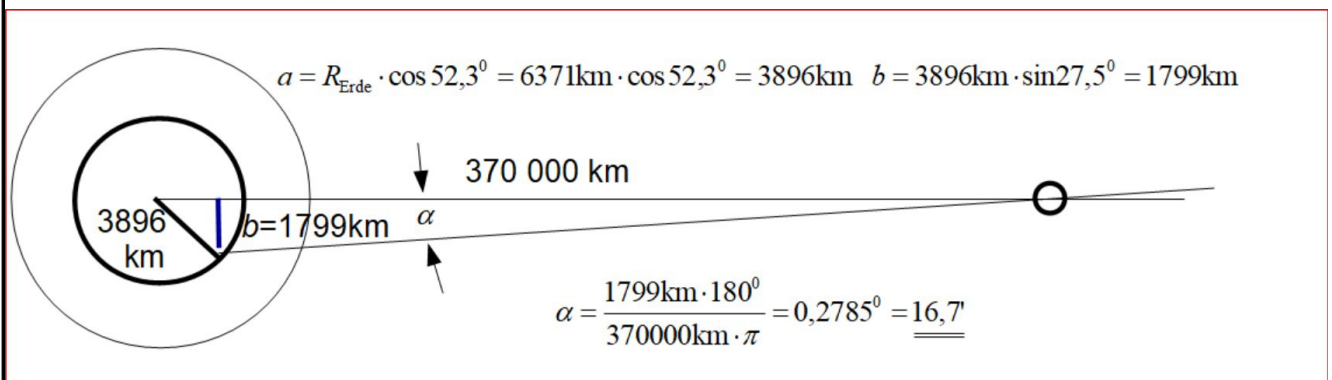
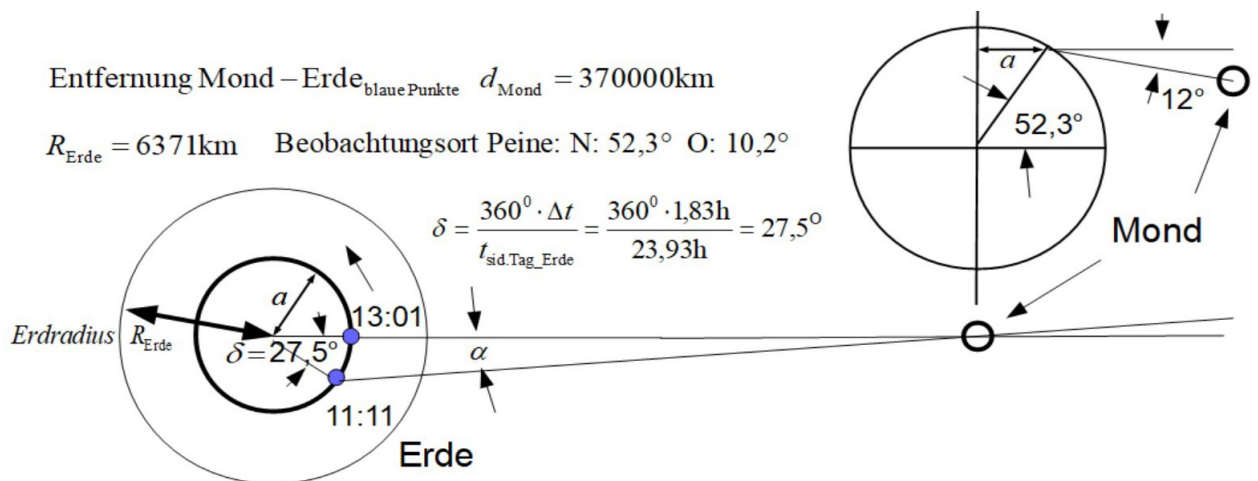
$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$$

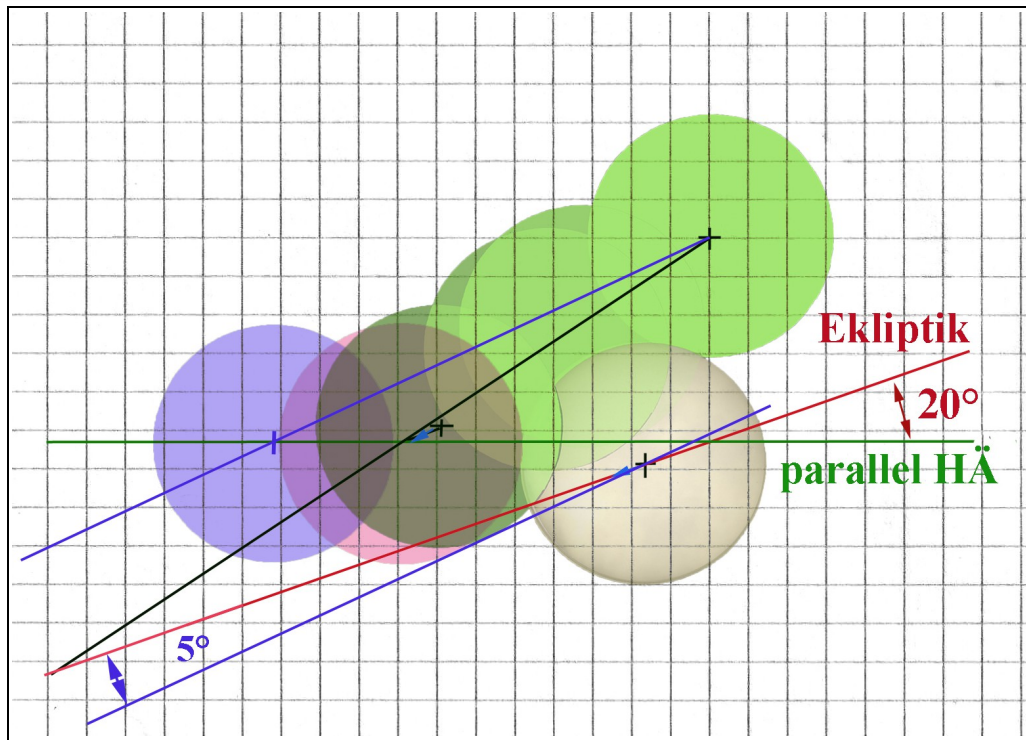
Lösung



d) Durch die Drehung der Erde bei der Finsternis erscheint der Mond gegenüber der Sonne aufgrund des Parallaxeneffektes verschoben. Daher muss der rosa Mond so korrigiert werden, dass er, wie aus der Position um 11:11 Uhr betrachtet, aussehen würde. Ermitteln Sie den Verschiebungswinkel in Bogenminuten und verschieben Sie den rosa Mond (Mittelpunkt) um diesen Betrag in die richtige Richtung. Zeichnen Sie nun die korrigierte Mondbahn ein und bestimmen Sie den Winkel zwischen ihr und der Ekliptik.

Hinweis: Mondbahn und die Ebene des Breitenkreises befinden sich zu diesem Zeitpunkt nicht genau in einer Ebene, da die Deklination vom Mond -12° beträgt (s. Bild unten rechts). Dieses hat keinen Einfluss auf die Berechnung von α



**Aufgabe: Bestimmen Sie die Umlaufzeit des Mondes um die Erde**

a) Gegeben ist die bezüglich der Erde korrigierte Mondbahn von 11:11 Uhr bis 13.01 Uhr am 25. Oktober 2022 (s. Bild oben). Mit diesen Daten soll die Umlaufzeit des Mondes um die Erde ermittelt werden. Vereinfacht ist von einer kreisförmigen Bahn auszugehen.

b) Vergleichen Sie den ermittelten Wert mit der siderischen Umlaufzeit von 27,3 Tagen und begründen sie die Abweichung!

c) Berechnen Sie die Umlaufzeit mit dem dritten Keplerschen Gesetz mit folgenden Vorgaben: Kreisförmige Bahn, Mondentfernung 374 000 km, Masse der Erde $M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Vergleichen sie diesen Wert mit dem von a) .

Keplers Gesetz:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

 T Umlaufzeit r Entfernung M Masse (hier kann die Erdmasse eingesetzt werden).

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$$

Lösung

$$\text{a)} \quad \Delta\gamma = 62\text{mm} = 62' \quad T_{\text{U_Mond_a}} = \frac{1,83\text{h} \cdot 360 \cdot 60'}{62'} = 637,5\text{h} = \underline{\underline{26,56\text{d}}}$$

$$\text{b)} \quad \Delta A = \frac{26,56\text{d} - 27,3\text{d}}{27,3\text{d}} = -2,7\% \quad \text{Die Mondbahn wurde kreisförmig angenommen und der Mondabstand war geringer als im Mittel.}$$

$$\text{c)} \quad T_{\text{U_Mond_c}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r_{\text{Mond}}^3}{G \cdot M_{\text{Erde}}}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(374 \cdot 10^6)^3 \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}}} = 2,276 \cdot 10^6 \text{s} = \underline{\underline{26,35\text{d}}}$$

$$\Delta A_c = \frac{26,56\text{d} - 26,35\text{d}}{26,35\text{d}} \approx 0,8\%$$